Эконометрикийн арга загварууд

Гарын авлага

Редактор доктор (Ph.D), дэд профессор Я.Базарсад

Улаанбаатар хот 2007 он

Зохиогчид: Я. Базарсад
М. Банзрагч
В. Батзориг
П. Доржнаран
У. Дэлгэрсайхан
Я. Лутбат
Н. Мөнхдалай
Р. Энхбат

Эконометрикийн арга загварууд

Номын эхийг LaTeX систем ашиглан бэлтгэсэн Я. Лутбат

Эдийн засгийн мэргэжлээр суралцаж буй оюутан болон эконометрик сонирхогч багш, судлаач нарт зориулав.

Гарын авлага шугаман регрессийн (хос ба олон хувьсагчийн) загварын параметрүүдийн үнэлэлт байгуулах хамгийн бага квадратын ба хамгийн их үнэний хувь бүхий арга тэдгээрийн өргөтгөлүүд, авторегрессийн процесс, шугаман загвараар прогноз хийх, регрессийн тэгшитгэлийн системийн загвар, хугацааны стационар болон стационар биш цувааны загварын онцлог зэрэг асуудлыг авч үзэж, эдийн засгийн практик хэрэглээний жишээ бодлогуудыг бодож оруулсан.

DDC

519.6.028

Б-168

ISBN 99927-73-132-1

Агуулга

Зураг

Хүснэгт

Өмнөх үг

Эконометрик нь эдийн засгийн объект ба процессуудын тодорхой тоон хамаарлыг математик статистикийн аргаар судалдаг хэрэглээний эдийн засгийн салбар ухаан юм. Эдийн засгийн мөн чанарыг танин мэдэх, задлан шинжлэх, хэтийн төлөвийг урьдчилан таамаглах асуудлуудыг эконометрикийн аргуудаар шийдвэрлэнэ. Манай их дээд сургуулиуд эдийн засгийн сургалтын хөтөлбөр, төлөвлөгөөгөө зах зээл өндөр хөгжсөн орны хөтөлбөрт ойртуулан шинэчилж байгаа өнөө үед эконометрикийн шинжлэх ухааныг судлах шаардлага зайлшгүй хэрэгцээ болон дэвшигдэж байна. Энэ хэрэгцээг хангахад юуны өмнө эх хэл дээр бичигдсэн ном сурах бичиг, гарын авлага, бодлогын хураамж шаардлагатай нь мэдээж. Энэхүү зорилгод өчүүхэн хувь нэмэр оруулах үүднээс “Эконометрикийн арга, загварууд” гарын авлагыг өргөн олон уншигч, судлаач, багш, оюутан та бүхэнд толилуулж байна.

Энэхүү гарын авлага нь ШУТИС–ын КтМС–ийн эконометрик, үйлдлийн судалгааны баг, МУИС–ийн ЭЗС–ийн математикийн багш нар 2005 – 2007 онд хамтран явуулсан семинарын үр дүн бөгөөд Я. Р. Магнус, П. К. Катышев, А. А. Пересецкий нарын “Эконометрика (Начальный курс)”, “Сборник задач по начальному курсу эконометрики” сурах бичгүүдийг үндсэн материал болгон сонгон авч, хос болон олон хэмжээст регрессийн загварын онолын асуудлууд, хугацааны цувааны шинжилгээ, эконометрикийн олон төрлийн загваруудын онцлогууд, тэдгээрийн эдийн засаг дахь практик хэрэглээний бодлогуудыг түүвэрлэн авч эх хэл дээр хөрвүүлэн оруулсан болно.

Гарын авлага оршил хэсгийг оруулан 12 бүлэгтэй. II–III бүлэгт хос болон олон хэмжээст регрессийн загвар, загварын параметрүүдийн үнэлэлт байгуулах хамгийн бага квадратын болон хамгийн их үнэний хувь бүхий аргууд, үнэлэлтийн статистик чанарууд, параметрийн итгэх завсар байгуулах, статистик таамаглал шалгах зэрэг онолын шинжтэй асуудлуудыг авч үзэж, харгалзах практик жишээ бодлогуудаар баяжуулан тайлбарласан.

IV–V бүлэгт олон хэмжээст регрессийн зарим онцлогууд тухайлбал, мультиколлинеар шинж, идэвхгүй хувьсагч, тухайн корреляц болон олон хэмжээст регрессийн зарим өргөтгөлийн тухай асуудлуудыг хөндөж онолын болон олон тооны практик бодлогуудыг эконометрикийн багц программ ашиглан бодож үзүүлэв.

VI–VII бүлэгт гетероскедастик шинж агуулсан загвар, уг шинжийг илрүүлэх тестүүд, I эрэмбийн авторегрессийн процесс, авторегресстэй загварыг үнэлэх процедурууд, хугацааны корреляцийг шалгах тест болон холбогдох жишээ бодлогууд багтсан.

VIII–X бүлэгт шугаман регрессийн загвар ашиглан прогнозлох тохиолдлууд, хэрэгсэл хувьсагч ашиглан параметрийн хазайлтгүй үнэлэлт гарган авах онолын арга, регрессийн тэгшитгэлийн системээр загварыг үнэлэх аргуудыг оруулсан.

XI бүлэгт регрессийн загвар дахь хамгийн их үнэний хувь бүхий аргыг олон хэмжээст тохиолдолд дэлгэрүүлэн авч үзэж, үнэлэлтийн чанарууд, өргөтгөсөн шугаман загварт нэмэлт зааглалуудыг хангах эсэх тухай таамаглал шалгах тестүүдийг томъёолон оруулсан.

XII бүлэгт янз бүрийн хэлбэрийн лаг бүхий хугацааны цувааны загварууд, тэдгээрийн параметрийг үнэлэх арга, хугацааны стационар цуваа, стационар цувааны AR, MA, ARIMA, ARMA загварууд тэдгээрийн онцлог болон ARCH, GARCH загварын тухай нэмж тусгасан.

Бүлэг тус бүрийн эхэнд онолын товч тойм, зарим гаргалгаа, санамж дүгнэлтүүдийг томъёолон, эдгээртэй холбогдсон эдийн засгийн практик жишээ бодлогуудыг бодолттой хамт оруулсан ба зарим тохиолдолд эконометрикийн багц программ ашиглан тооцооллыг гүйцэтгэсэн.

Эцэст нь энэхүү гарын авлагыг бичихэд үнэтэй санал зөвлөгөө өгч семинар хамтран удирдсан МУИС–ийн профессор, ШУ–ны доктор Р.Энхбатад талархал илэрхийлж байна.

Номын талаарх шүүмж, санал дүгнэлтээ КтМС–ийн эконометрик үйлдлийн судалгааны багийн нэр дээр ирүүлбэл гүнээ талархах болно.

Зохиогчид

Бүлэг 1

Оршил

1.1 Загварууд

Математик эдийн засаг нь эдийн засгийн хуулиудыг математик томъёо, тэгшитгэлээр илэрхийлдэг бол эконометрик нь эдгээр хуулиудыг туршилтын өгөгдлүүдээр шалгаж эдийн засгийн үзэгдэл процесст дүн шинжилгээ, прогноз хийдэг математикийн шинжлэх ухааны нэг салбар юм. Нөгөө талаар, эконометрикийн салбарыг хөгжүүлэхэд гарамгай амжилт гаргаж, эдийн засгийн салбарт Нобелийн шагнал хүртсэн (1969) Р.Фришийн тодорхойлсноор эконометрик нь математик, эдийн засгийн онол ба статистик гэсэн гурван салбар ухааны нэгдэл юм. Эдийн засгийн үзүүлэлтүүдийн тоон хамаарлыг гаргахын тулд туршилтын буюу ажиглалтын утгуудыг ашигладаг. Үүний дараа онол болон ажиглалтын утгууд дээр суурилан тухайн үзэгдэл процессийн загвар боловсруулан түүний параметрүүдийг үнэлж, хэтийн төлөвийг урьдчилан тооцоолж зөвлөмж гаргадаг. Эконометрикийн шинжилгээний бүх үе шатанд загвар ашиглана. Эдийн засгийн хуулиуд нь ихэнх тохиолдолд, энгийн математик томъёо, илэрхийллээр дүрслэгдэнэ. Жишээлбэл, хэрэглээний функц авч үзье:

$$\ln C = \beta_0 + \beta_1 \ln Y + \beta_2 \ln P.$$

Үүнд,

C–тухайн жилд нэг хүнд ноогдох ямар нэг хүнсний хэрэглээний хэмжээ,

Y–нэг хүнд ноогдох тухайн жилийн бодит орлого,

P–хүнсний бүтээгдэхүүний үнийн индекс ба энэ нь амьжиргааны баталгаажих түвшний ерөнхий индексээр зохицуулагдана (*дефлятор*), $\beta_0, \beta_1, \beta_2$–тогтмолууд.

Энэ тэгшитгэлийг хэрэглээний төлөв байдлын тэгшитгэл гэнэ. Энэ тэгшитгэл тухайн хүнсний бүтээгдэхүүнийг үнийн индекс болон бодит орлогоос хамааруулан хэрэглэгч хэрхэн худалдаж авах хэмжээг дунджаар харуулна. $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ коэффициентуудын утгыг олсны дараа төлөв байдлын тэгшитгэл бүрэн тодорхойлогдоно. Иймд эконометрикийн шинжилгээний нэг зорилго бол ажиглалтын утгуудыг ашиглан эдгээр коэффициентуудыг тодорхойлоход оршино. Гэхдээ энэ нь цорын ганц зорилго биш юм. Эконометрикийн шийдэх өөр бусад зорилтуудыг тодорхойлж болно. Тухайлбал,

- тэгшитгэлд нэмж оруулах нэмэлт хувьсагчдыг судлах. Жишээлбэл, хүнсний биш бараа, бүтээгдэхүүний үнэ байж болно,
- тэгшитгэлээс хасах зарим хувьсагчдыг судлах,
- ажиглалтын утгууд хэр зэрэг бодитойгоор сонгогдсон, бодит байдлыг зөв илэрхийлэх боломжтой эсэхийг судлах,
- шугаман загвар нь хэр зэрэг үнэн болох, эдийн засгийн онолоор зөв тайлбарлагдах эсэхийг шалгах,
- загвар нь бүрэн гүйцэд болсон эсэхийг шалгах, манай жишээнд бид зөвхөн эрэлтийн тэгшитгэл авч үзсэн. Хэрэв эрэлт ба нийлүүлэлтийн тэгшитгэлийг хамтад нь авч үзвэл ямар байх вэ?
- бидний тавьсан зорилтыг шийдвэрлэхийн тулд, макро эдийн засгийн дээрхтэй төстэй тэгшитгэлийг авч үзэх нь хангалттай эсэх, микро түвшний өгөгдлийг авч үзэх шаардлагатай эсэхийг тогтоох гэх мэт.

Дээр авч үзсэн загвар нь статистик загвар юм. Заримдаа динамик загвар илүү тохиромжтой байж болно. Жишээлбэл, өнгөрсөн жилийн орлого энэ жилийн хэрэглээний түвшинд нөлөөлнө гэж таамаглаж болно. Тэгвэл энэ тохиолдолд, түүнийг загварын тэгшитгэлд оруулж тооцох шаардлага гарна.

Эконометрик нь энэ бүх асуудлуудыг авч үзэх ба шийдэх аргуудыг энэ номын дараагийн бүлгүүдэд тодорхой жишээн дээр тайлбарлан харуулна.

1.2 Загварын төрлүүд

Математик загварууд нь бизнес, эдийн засаг, нийгмийн ухаан төдийгүй улс төрийн процессыг судлахад өргөн хэрэглэгдэнэ. Судлаж буй процессын мөн чанарыг бүрэн таньж мэдэх, түүнийг задлан шинжлэхэд математик загварыг ашигладаг билээ. Одоо байгаа өгөгдөл, ажиглалтын утгууд дээр тулгуурлан байгуулсан загвар нь хамааран хувьсагчийн хэтийн төлөвийг үнэлэхэд бас хэрэглэгдэнэ. Шинжилгээ болон прогноз хийхэд үндсэн гурван төрлийн загвар ашиглана.

1.2.1 Хугацааны цувааны загвар

Энэ загварын ангид дараах загварууд багтана:

Чиг хандлага (тренд).

$$y(t) = T(t) + \varepsilon_t.$$

Үүнд, $T(t)$–параметр хэлбэрт өгөгдсөн, хугацааны тренд (жишээлбэл, шугаман тренд $T(t) = a + bt$), ε_t–санамсаргүй (стохастик) компонент.

Улирлын хандлага.

$$y(t) = S(t) + \varepsilon_t.$$

$S(t)$–үет (улирлын хандлагат) компонент, ε_t–санамсаргүй (стохастик) компонент.

Тренд ба улирлын хандлага.

$$y(t) = T(t) + S(t) + \varepsilon_t,$$

$$y(t) = T(t)S(t) + \varepsilon_t.$$

Үүнд, $T(t)$–хугацааны тренд, $S(t)$–улирлын тренд, ε_t–санамсаргүй компонент.

Жишээлбэл, олон жилийн ургацын хэмжээ болон Монгол улсад жил бүр ирж байгаа жуулчдын тоо нь улирлын болон хугацаан трендээр илэрхийлэгдэнэ.

Хугацааны цувааны загваруудад нилээд төвөгтэй загварууд болох авторегрессийн загвар, шилжих дунджийн загвар (ARIMA) болон бусад загварууд багтана. Ийм загваруудын ерөнхий онцлог бол хугацааны цувааны өмнөх утгуудыг ашиглан түүний төлөв байдлыг бүрэн тайлбарлахад оршино.

1.2.2 Нэг тэгшитгэл бүхий регрессийн загвар

Энэ загварт хамааран (тайлбарлагдах) хувьсагч y нь

$$f(x, \beta) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \beta_1, \ldots, \beta_p)$$

хэлбэрийн функцээр илэрхийлэгдэнэ. Үүнд, $x_1, x_2, \ldots, x_k$–үл хамаарах (тайлбарлагч) хувьсагчид, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$–параметрүүд.

$f(x, \beta)$ функцийн хэлбэрээс хамааруулан загварыг шугаман ба шугаман бус гэж ангилна. Жишээлбэл, мөхөөлдөсний эрэлтийн функцийг хугацаа, агаарын температур, орлогын дундаж түвшин, нас, хүйс, боловсролын түвшин, ажилласан хугацаа зэрэг хувьсагчуудаас хамааруулан авч үзэж болно. Энэ төрлийн загварууд нь хугацааны цувааны загвартай харьцуулбал илүү өргөн хүрээг хамардаг онцлогтой.

1.2.3 Нэг агшин дахь тэгшитгэлийн систем

Энэ төрлийн загварууд нь тэгшитгэлийн системээр илэрхийлэгдэнэ. Систем нь регрессийн тэгшитгэлүүдээс бүрдэх ба тэгшитгэл бүр нь өөрийн тайлбарлах хувьсагчдаас гадна өөр тэгшитгэлүүдийн тайлбарлах хувьсагчдыг агуулсан байдаг. Иймд тайлбарлах хувьсагчдыг агуулсан систем тэгшитгэлүүдийг бодно гэсэн үг юм.

Жишээлбэл, эрэлт нийлүүлэлтийн дараах загварыг авч үзье.

Q_t^D– t хугацаан дахь бүтээгдэхүүний эрэлт (*demand*),

Q_t^S– t хугацаан дахь бүтээгдэхүүний нийлүүлэлт (*supply*),

P_t– t хугацаан дахь бүтээгдэхүүний үнийн түвшин (*price level*),

Y_t– t хугацаан дахь орлого (*income*).

Эрэлт ба нийлүүлэлтийн дараах загварыг бичиж болно:

$$\begin{cases} Q_t^S = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \alpha_3 P_{t-1} + \varepsilon_t & \text{(нийлүүлэлт)} \\ Q_t^D = \beta + 1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + u_t & \text{(эрэлт)} \\ Q_t^S = Q_t^D & \text{(тэнцвэр)} \end{cases}$$

Бүтээгдэхүүний үнэ P_t ба эрэлт $Q_t = Q_t^D = Q_t^S$ нь загварын тэгшитгэлүүдээс олдоно. Өөрөөр хэлбэл, эндоген хувьсагчид юм. Эдгээрийг тодорхойлох хувьсагчид нь Y_t–орлого ба өмнөх оны P_{t-1}–үнэ болно.

1.3 Өгөгдлийн төрлүүд

Эдийн засгийн процессыг загварчлахад хоёр төрлийн өгөгдлийг ашиглана:

- орон зайн өгөгдөл (*cross-sectional data*),
- хугацааны цувааны өгөгдөл (*time series data*).

Жишээлбэл, нэг ижил хугацаанд олон төрлийн пүүсүүдээс авсан үйлдвэрлэлийн хэмжээ, ажилчдын тоо, орлого зэрэг мэдээлэл нь орон зайн өгөгдөл юм. Харин сүүлийн жилүүдийн улирал бүрээр ажигласан инфляцийн түвшин, дундаж цалин, үндэсний бүтээгдэхүүн, мөнгөний урсгал зэрэг нь хугацааны цувааны өгөгдөл болно. Монгол төгрөгний нэг долларт харьцах өдөр бүрийн харьцаа (ханшны хэлбэлзэл) мөн хугацааны цувааны өгөгдөл юм. Хугацааны цувааны өгөгдлийн нэг онцлог бол эдгээр нь хугацааны хувьд эрэмбэлэгдсэн байх ба ойрхон хугацаанд ажиглагдсан утгууд нь гол төлөв хоорондоо хамааралтай байдагт оршино.

1.4 Эконометрикийн загвар байгуулах үндсэн алхам

Эконометрик загварыг дараах 6 үе шаттайгаар байгуулна.

1-р шат (тавил). Судалгааны зорилгыг тодорхойлж, эдийн засгийн хувьсагчдыг тодорхойлно. Эконометрик загварчлалын гол зорилго нь судлаж буй эдийн засгийн процессыг задлан шинжлэх, түүний эдийн засгийн үзүүлэлтийн хэтийн тооцоо хийх, гадаад хувьсагчдын нөлөөг судлах, санамсаргүй байдлыг ялган таних, удирдлагын шийдвэр гаргах зэрэг болно. Эдийн засгийн хувьсагчдыг онолын үндэслэлтэйгээр сонгох шаардлагатай. Тухайлбал, үл хамаарах буюу тайлбарлагч хувьсагчид нь функционал буюу корреляц хамааралгүй байх явдал юм. Эсрэг тохиолдолд, загварын параметрүүдийг үнэлэх боломжгүй болдог ба бодит байдалд үл нийцэх, тогтворгүй шийдийг бий болгоход хүргэдэг. Эдийн засгийн процессын чанарын үзүүлэлтийг (жишээлбэл, хүйс, боловсрол) үнэлэхдээ "идэвхгүй" хувьсагчдыг ашиглана.

2-р шат (урьдчилсан). Судалж буй процессын мөн чанарыг задлан шинжлэх, урьдчилсан мэдээллийг формал хэлбэрт шилжүүлэх.

3-р шат (параметризаци). Загварын ерөнхий төрлийг сонгоно, түүнд оролцож буй хамаарлуудыг тогтооно. Үүнд $f(x)$ функцийн хэлбэрийг сонгож үл хамаарах (тайлбарлагч) ба тайлбарлагдах хувьсагчдын хамаарлыг тогтооно.

4-р шат (мэдээлэл). Эдийн засгийн хувьсагчдын ажиглалтын утгуудын мэдээллийг бий болгоно:

$$(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ip}; y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{iq}), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

5-р шат (үнэлгээ). Загварын параметрүүдийг үнэлнэ.

6-р шат (шалгах). Загварын бодит байдлыг илэрхийлэх (адекват) чанарыг судална. Байгуулсан загвар нь эдийн засгийн бодит байдлыг хэр зэрэг нарийвчлалтай, найдвартай харуулж байгааг энэ шатны шинжилгээ харуулна.

Бүлэг 2

Хос регрессийн загвар

Хоёр буюу хэд хэдэн санамсаргүй хэмжигдэхүүний хамаарлыг судалж, хамаарлыг функцэн хэлбэрээр илэрхийлэн, гарган авсан загварын параметрүүдийг олох нь регрессийн шинжлэлийн үндсэн асуудал билээ. Эдийн засгийн судалгааны практикт, өгөгдлүүдийг үргэлж олон хэмжээст хэвийн тархалттай эх олонлогоос авсан мэтээр үзэж болдоггүй байна. Учир нь, тэдгээрийн аль нэг нь санамсаргүй биш байх эсвэл, регрессийн муруй илэрхий шугаман биш байх тохиолдлууд гарна. Ийм тохиолдолд, туршилтын өгөгдлүүдэд "хамгийн сайн тохирох" муруй буюу гадаргууг байгуулахыг зоридог бөгөөд энэ үйл ажиллагаа, аргыг регрессийн шинжилгээ хэмээн нэрлэнэ.

2.1 Функцэн, статистик, корреляц хамаарлууд

Нэг хэмжигдэхүүний утга бүрт нөгөө хэмжигдэхүүний тодорхой утга харгалзах хамаарлыг функцэн хамаарал гэдэг. Бид функцэн хамаарлын тухай байгалийн шинжлэх ухаанаас, жишээлбэл математик, физикийн хуулиудаас мэдэх билээ. Гэтэл байгал ертөнцөд функцэн биш хамааралтай хэмжигдэхүүнүүд бишгүй олон байдаг ажээ. Тухайлбал, X хэмжигдэхүүний бэхлэгдсэн утга бүрт Y хэмжигдэхүүний утгуудын олонлог харгалзах боловч чухам аль утга нь харгалзахыг урьдчилан хэлэх боломжгүй хэмжигдэхүүнүүд байдаг байна. Ийнхүү нэг хэмжигдэхүүний утга бүрт нөгөө хэмжигдэхүүний тодорхой тархалт харгалзаж байвал тэдгээрийг статистик (стохастик эсвэл магадлалт) хамааралтай гэнэ. Статистик хамаарлын жишээ гэвэл, тариалангийн тодорхой талбайг бордсон бордооны хэмжээ ба уг талбайгаас авах ургацын хэмжээ юм.

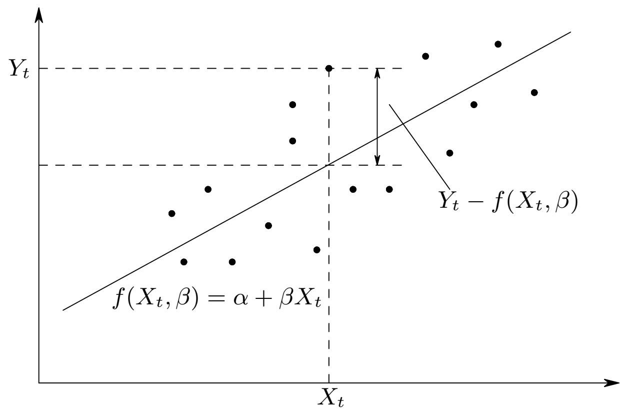
Хоёр хэмжигдэхүүний статистик хамаарал нэг утгатай бишээс үүдэн нэг хэмжигдэхүүний утгуудаас нөгөө хэмжигдэхүүний нөхцөлт математик дундаж хэрхэн хамаарахыг авч үздэг. Ийм статистик хамаарлыг корреляц хамаарал гэнэ. Өөрөөр хэлбэл, нэг хэмжигдэхүүний утга ба нөгөө хэмжигдэхүүний нөхцөлт мат. дунджийн функцэн хамаарлыг корреляц хамаарал гэнэ. Математик илэрхийллээр бичвэл:

$$M(Y/X = x) = \varphi(x), \quad M(X/Y = y) = \psi(y) \tag{2.1}$$

(2.1)–ийг регрессийн загварын тэгшитгэлүүд, тэдгээрийн графикийг регрессийн муруй гэнэ.

2.2 Хамгийн бага квадратын арга (ХБКА)

Бидэнд $X_t, Y_t (t = 1, 2, \ldots, n)$ гэсэн хоёр хэмжигдэхүүний туршилтын утгууд (X_t, Y_t) өгөгдсөн гэе. (X_t, Y_t) утгуудыг хавтгайн координатын системд дүрслэе. (Зураг 2.1.) Бидний зорилго бол Y–ийн X–ээс хамаарах хамаарлыг "хамгийн сайнаар"



Зураг 2.1: Хоёр хувьсагчийн шугаман регрессийн загвар

илэрхийлэх $f(X_t, \beta) = \alpha + \beta x$ функцийг олох явдал. Энэ нь туршилтын өгөгдлүүдэд "хамгийн сайн тохирох" $f(X) = a + bX$ хэлбэрийн шугаман функцийг олно гэсэн үг юм. Өөрөөр хэлбэл, регрессийн загварын муруйн α, β параметрүүдийн үнэлэлт a, b–г туршилтын өгөгдлүүдийн тусламжтайгаар олно гэсэн үг. Дээр дурдсан "хамгийн сайнаар илэрхийлэх", "хамгийн сайн тохирох" гэдгийн дор туршилтын Y_t утгууд загварын муруйн $a + bX_t$ утгаас хазайх хазайлтуудын квадратын нийлбэр хамгийн бага байхыг ойлгоно. Өөрөөр хэлбэл,

$$F = \sum_{t=1}^{n} [Y_t - (a + bX_t)]^2 \longrightarrow \min \tag{2.2}$$

F функционалийн экстремумын зайлшгүй нөхцлийг бичвэл:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -2\sum_{t=1}^{n}(Y_t - a - bX_t) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = -2\sum_{t=1}^{n} X_t(Y_t - a - bX_t) = 0$$

$$\text{буюу} \quad a \cdot n + \sum X_t = \sum Y_t, \quad a \cdot \sum X_t + b \cdot \sum X_t^2 = \sum X_t Y_t \tag{2.3}$$

(2.3) системийн шийд $\widehat{a}$, $\widehat{b}$–г олбол

$$\widehat{b} = \frac{n\sum X_t Y_t - (\sum X_t)(\sum Y_t)}{n\sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)} \tag{2.4}$$

$$\widehat{a} = \frac{1}{n}\sum Y_t - \frac{1}{n}\sum X_t \cdot \widehat{b} = \overline{Y} - \overline{X} \cdot \widehat{b} \tag{2.5}$$

Үүнд, $\overline{X} = (1/n)\sum X_t$, $\overline{Y} = (1/n)\sum Y_t$, $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(X \cdot Y) - \mathrm{E}(X) \cdot \mathrm{E}(Y)$,
$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}(X))^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}^2(X)$.

E–математик дундаж (*expectation*), Var–дисперс (*variance*), Cov–ковариац (*covariance*).

Санамж 2.2.1. (2.3) системийн эхний тэгшитгэлээс

$$\overline{Y} = \widehat{a} + \widehat{b} \cdot \overline{X} \tag{2.6}$$

Өөрөөр хэлбэл, (2.1) функционалийг минималчлагч $Y = \widehat{a} + \widehat{b}X$ шулуун нь $(\overline{X}, \overline{Y})$ цэгийг дайрна.

Санамж 2.2.2. X_t $(t = 1, 2, \ldots, n)$–утгуудыг бүгд ижил биш гэж тооцно. Өөрөөр хэлбэл, $\mathrm{Var}(X) \neq 0$ үед (2.4) томъёо утга төгөлдөр юм.

2.2.1 Хазайлтаар илэрхийлсэн тэгшитгэл

X_t, Y_t утгууд түүврийн дунджаасаа хазайх хазайлтуудыг $x_t = X_t - \overline{X}$, $y_t = Y_t - \overline{Y}$ гэж тэмдэглэе.

Өмнөх бодлоготой адилаар, $F = \sum\limits_{t=1}^{n} [y_t - (a + bx_t)]^2$ функционалийг минималчлагч $f(x) = a + bx$ шугаман функцийг олох бодлого авч үзье.

Бодлогын шийд нь геометр сэтгэлгээний үүднээс авч үзвэл, X_t, Y_t хувьсагчийн хувьд олсон яг тэр шулуун (x, y) хавтгай дээр гарах нь тодорхой. Үнэн хэрэг дээрээ, X, Y хувьсагчдаас x, y хазайлтуудад шилжинэ гэдэг нь зөвхөн координатын эхийг $(\overline{X}, \overline{Y})$ цэгт зөөж буй хэрэг юм. (2.4) ба (2.5) томъёонд X_t, Y_t–г (x_t, y_t) хувьсагчдаар сольж, $\overline{x} = \overline{y} = (1/n)\sum x_t = (1/n)\sum y_t = 0$ болохыг тооцвол

$$\widehat{a} = 0, \quad \widehat{b} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2} = \frac{\sum (X_t - \overline{X})(Y_t - \overline{Y})}{\sum (X_t - \overline{X})^2} \tag{2.7}$$

Ийнхүү бид регрессийн шулууны өнцгийн коэффициент $\widehat{b}$–ийн өөр хэлбэрийг гарган авлаа.

2.2.2 Геометр тайлбар

$(x, y) = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{y} = \sum X_t Y_t$ гэсэн скаляр үржвэр тодорхойлогдсон n-хэмжээст вектор огторгуй R^n–ийг авч үзье. Үүнд, $\boldsymbol{x}'$–хөрвүүлсэн матриц буюу манай тохиолдолд $(1 \times n)$ хэмжээст вектор мөр.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\imath} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \quad \text{гэвэл}$$

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = a \cdot \boldsymbol{\imath} + b \cdot \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}$$

Үүнд: a, b–тоон коэффициентууд, $\widehat{\boldsymbol{y}}$ – $\boldsymbol{\imath}$, $\boldsymbol{x}$ векторуудаар байгуулагдах 2 хэмжээст гипрхавтгай (π) дээр орших вектор ($\boldsymbol{\imath}$, $\boldsymbol{x}$ векторууд коллинеар биш).

$\boldsymbol{e}$ вектор хамгийн бага утгатай байх a, b–г олох зорилго тавья. Өөрөөр хэлбэл, π дэд огторгуйн $\widehat{\boldsymbol{y}}$ вектороор $\widehat{\boldsymbol{y}}$ векторт хамгийн сайн аргаар дөхье.

$\boldsymbol{e}$ вектор (π) хавтгайд $\perp$ байх тийм $\widehat{\boldsymbol{y}}$ вектор бодлогын шийд болох нь илэрхий. Үүний тулд $\boldsymbol{e}$ вектор, $\boldsymbol{\imath}$ ба $\boldsymbol{x}$ вектор тус бүрт $\perp$ байхад хангалттай:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\imath}' \cdot \boldsymbol{e} = 0 \;&\Leftrightarrow\; \sum e_t = 0 \Leftrightarrow\; \sum (Y_t - a - bX_t) = 0, \\ \boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{e} = 0 \;&\Leftrightarrow\; \sum X_t e_t = 0 \Leftrightarrow\; \sum X_t (Y_t - a - bX_t) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Үүгээр бид экстремумын зайлшгүй нөхцөлүүдийг дахин гарган авлаа.

2.2.3 Бичлэгийн матрицан хэлбэр

$(n \times 2)$ хэмжээст матрицыг $\boldsymbol{X}$–ээр тэмдэглэе.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}.$$

Үүнд, $\boldsymbol{\beta}$ нь үл мэдэгдэх коэффициентуудын $(n \times 1)$ хэмжээст матриц.
$\boldsymbol{e}$ вектор ба π хавтгай ортогональ байх (2.8) нөхцлийг матриц хэлбэрээр бичвэл $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{e} = 0$ буюу $\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = 0$ хэлбэртэй болно.
Эндээс $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ буюу

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \cdot \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{2.9}$$

Дээр тэмдэглэсэн ёсоор $\boldsymbol{\imath}$, $\boldsymbol{x}$ векторууд шугаман хамааралгүй учраас $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ матриц урвуутай байна.

2.3 Хоёр хувьсагчийн шугаман регрессийн загвар

Өмнөх зүйлүүдэд зөвхөн туршилтын өгөгдөлд хамгийн сайн тохирох шугамыг байгуулах тухай авч үзсэн. Одоо, өгөгдлүүдийн зарим статистик чанаруудыг бодлогын тавилд нэмж оруулъя. Үнэн хэрэг дээрээ, X–ийн зөвхөн нэг утганд Y–ийн янз бүрийн утгууд ажиглагдаж болох билээ.

Жишээ1. X–хувь хүний нас, Y–түүний цалин

Жишээ2. X–өрхийн орлого, Y–өрхийн хүнсний зардал.

Шугаман регрессийн онолд Y_t–ийн X_t–ээс хамаарах хамаарлыг дараах хэлбэртэй авч үздэг.

$$Y_t = a + b \cdot X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n.$$

Үүнд, X_t–санамсаргүй биш хэмжигдэхүүн, Y_t, ε_t–санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд бөгөөд дараах байдлаар нэрлэж хэвшсэн байдаг.

Y_t–хамааран хувьсагч, тайлбарлагдах хувьсагч, эндоген хувьсагч...

X_t–үл хамаарах хувьсагч, тайлбарлагч хувьсагч, экзоген хувьсагч, регрессор...

ε_t–регрессийн алдаа (зөрөө, хэлбэлзэл), *невязка (возмущение)*...

Регрессийн алдаа–ε_t санамсаргүй байдаг нь дараах 2 үндсэн шалтгаантай:

1. Бидний загвар бол бодит байдлын хураангуй хэлбэр учраас үнэн чанартаа Y–д нөлөөлөх өөр бусад параметрүүд орхигдсон байгаа. Жишээ1–д хувь хүний цалин тухайлбал боловсролын түвшин, ажилласан жил, хүйс, ажиллаж буй секторын (улсын, хувийн) төрөл зэргээс хамаарна.

2. Өгөгдлүүдийг хэмжихэд санамсаргүй алдаа гарна. Тухайлбал Жишээ2–д, өрхийн хүнсний зардлын өгөгдөл гэхэд л асуулгад оролцогчдын хариултаар эсвэл тэдний тэмдэглэлээс авагдах учир алдаа гарах боломжтой юм. Ийм учраас ε_t–г Y_t хэмжигдэхүүнтэй ижил тархалтын функц бүхий санамсаргүй хэмжигдэхүүн гэж үзнэ.

Шугаман регрессийн сонгодог загварын хувьд тавигдах урьдчилсан нөхцөлүүд:

1. $Y_t = a + b \cdot X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n.$–загварын томъёолол,

2. X_t–санамсаргүй биш; $(X_1, \ldots, X_n)$ вектор $\boldsymbol{\imath} = (1, \ldots, 1)'$–тэй коллинеар биш.

3a. $\mathrm{E}\varepsilon_t = 0$, $\mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma^2$,

3b. $\mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \ \forall t \neq s$,

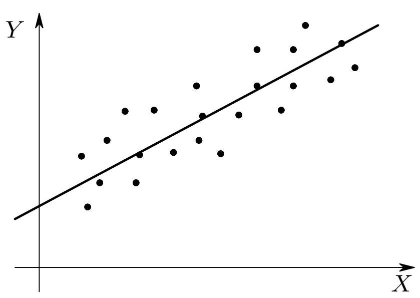
3c. $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2), \ t = 1, 2, \ldots, n$ (нэмэлт нөхцөл).

Дээрх нөхцөлүүдийг тайлбарлая:

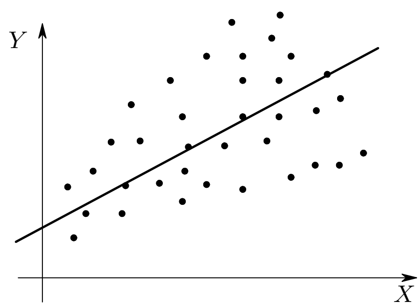
1. Загварын математик томъёолол нь, хамааран хувьсагч Y_t–ийн X_t–ээс хамаарах хамаарал санамсаргүй алдааны нарийвчлалтайгаар $f(X_t) = a + b \cdot X_t$ хуулиар илэрхийлэгдэхийг зааж буй юм.

3a. $\mathrm{E}\varepsilon_t = 0$ нөхцөл нь $\mathrm{E}Y_t = a + b \cdot X_t$ буюу бэхлэгдсэн X_t–ийн хувьд Y_t–ийн дундаж утга $a + b \cdot X_t$ байхыг илэрхийлнэ.

3a. $\mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ нөхцөл нь алдааны диперс ажиглалтын дугаараас (X_t регрессороос) хамаарахгүй болохыг илэрхийлнэ. Энэ нөхцөл биелэгдэж байвал алдааг гомоскедастик (*homoscedasticity*) гэнэ. Хэрэв гомоскедастик нөхцөл биелэхгүй байвал алдааг гетероскедастик (*heteroscedasticity*) гэж нэрлэнэ. Дараах зургуудаар (Зураг 2.2, Зураг 2.3) алдааны гомоскедастик, гетероскедастик тохиолдлуудыг үзүүлэв.



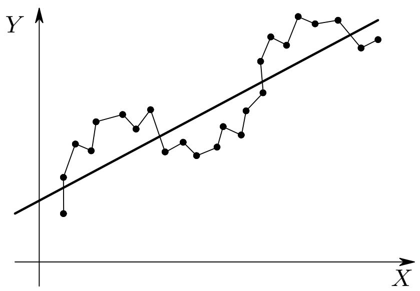
Зураг 2.2:



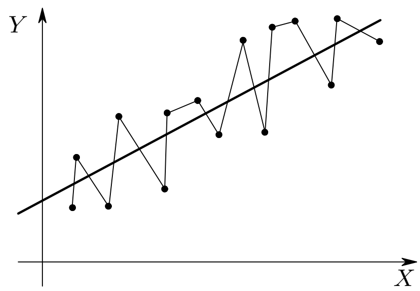
Зураг 2.3:

3b. $\mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \ \forall t \neq s$ нөхцөл, өөр өөр ажиглалтын алдаа корреляц хамааралгүй болохыг илэрхийлнэ. Өгөгдлүүд хугацааны цуваа байх үед энэ нөхцөл ямагт алдагддаг. Энэ тохиолдолд алдааны автокорреляцийн (*serial correlation*) тухай авч үзнэ.

$\mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t+1}) = \rho \neq 0$ үед алдааны автокорреляцийн хялбар тохиолдлуудыг Зураг 2.4 ($\rho > 0$), Зураг 2.5 ($\rho < 0$)–ээр үзүүлэв.



Зураг 2.4:



Зураг 2.5:

3a, 3b нөхцөлүүдийг дараах байдлаар вектор хэлбэрт бичиж болно:

$$\mathrm{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}, \quad \mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{I_n}$$

Үүнд, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)'$, $\boldsymbol{I_n} - n \times n$ хэмжээст нэгж матриц, $\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) - n \times n$ хэмжээст, ковариацийн матриц. Түүнчлэн 3a, 3b нөхцөлүүдийг хамааран хувьсагчийн хувьд бичиж болохыг тэмдэглэе: $\mathrm{E}Y_t = a + b \cdot X_t$, $\mathrm{V}(Y_y) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(Y_t Y_s) = 0$, $t \neq s$.

3c. нөхцөл нь ε_t $(t = 1, 2, \ldots, n)$ алдаа хэвийн тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүн байна гэсэн үг юм: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Регрессийн тэгшитгэл гарган авахад эхний 1–3b нөхцөл хангалттай болвч 3c нөхцлийг нэмэлт болгон авч үздэг. 1–3c нөхцлийг хангах загварыг нормал, шугаман регрессийн загвар (*Classical Normal Linear Regression model*) гэнэ.

Санамж 2.3.1. Нормал шугаман регрессийн нөхцөлд 3b нөхцөл нь "$\varepsilon_t, \varepsilon_s (t \neq s)$ алдаанууд статистик хамааралгүй" гэсэн нөхцөлтэй эквивилент байна.

Санамж 2.3.2. 3a, 3b нөхцлийг илүү сул нөхцлөөр (X санамсаргүй байж болно!) солиход загварын ихэнх чанарууд хадгалагдана:

$3'$a,b $\mathrm{Cov}(X_t, \varepsilon_s) = 0, \quad (\forall\ t, s)$

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t | X) = 0, \ \mathrm{E}(\varepsilon_t^2 | X) = \sigma^2, \quad (\forall\ t)$$
$$\mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s | X) = 0. \quad (\forall\ t \neq s)$$

2.4 Гаусс-Марковын теорем. σ^2 дисперсийн үнэлэлт

1–3b нөхцлийг хангах шугаман загварын a, b, σ^2 параметрүүдийн "хамгийн сайн" үнэлэлтийг (X_t, Y_t), $t = 1, 2, \ldots, n$. өгөгдлүүдээр олох явдал бол бидний зорилго билээ. "Хамгийн сайн" (*Best Linear Unbiased Estimator, BLUE*) гэдгийн дор тухайлбал, Y_t–ийн хазайлтгүй шугаман үнэлэлтүүдийн ангид хамгийн бага дисперстэйг нь ойлгоно. Ийм үнэлэлт оршин байх нь, бага дисперс бүхий шугаман биш хазайлтгүй үнэлэлт олдохгүй гэсэн үг биш гэдгийг тэмдэглэе. Түүнчлэн, хазайлтгүй гэсэн нөхцлийн оронд үнэлэлт ба жинхэнэ утгын дундаж квадрат хазайлт $\mathrm{E}(\widehat{b} - b)^2$ хамгийн бага байх нөхцлийг авч болно.

Теорем 2.4.1 (Гаусс-Марков)**.** *1, 2, 3a, 3b нөхцөлүүд биелэх үед хамгийн бага квадратын аргаар олсон $\widehat{a}, \widehat{b}$ үнэлэлтүүд нь бүх хазайлтгүй шугаман үнэлэлтүүдийн ангид хамгийн бага дисперстэй байна.*

Теоремийн баталгааг энд авч үзэхгүй бөгөөд баталгааны явцад гарах зарим үр дүнг тэмдэглэе:

$$\mathrm{V}(\widehat{b}) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} \tag{2.10}$$

$$\mathrm{V}(\widehat{a}) = \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2} \tag{2.11}$$

$$\mathrm{Cov}(\widehat{a}, \widehat{b}) = -\frac{\overline{X}}{\sum x_t^2} \sigma^2 = -\frac{\overline{X}}{\sum (X_t - \overline{X})^2} \sigma^2 \tag{2.12}$$

2.4.1 Алдааны дисперс σ^2–ын үнэлэлт

Регрессийн a, b коэффициентуудын хамгийн сайн (Гаусс-Марковын теоремийн утгаар) үнэлэлтийг байгуулж болж байгаа боловч, регрессийн тэгшитгэлд σ^2 гэсэн өөр нэг параметр байгаа билээ. Тооцоологдоогүй үлдсэн санамсаргүй хүчин зүйлийн нөлөө болон ажиглалтын (туршилтын) алдааг энэхүү параметр тодорхойлно.

Регрессийн тэгшитгэлээр олсон Y_t–ийн утгыг $\widehat{Y_t} = \widehat{a} + \widehat{b}X_t$ гэж тэмдэглээд прогнозын утга (*fitted value*) гэж нэрлэнэ. Прогнозын ба туршилтын утгын хооронд гарах зөрөөг регрессийн үлдэгдэл (e_t) гэж нэрлээд $Y_t = \widehat{Y_t} + e_t = \widehat{a} + \widehat{b}X_t + e_t$ тэгшитгэлээс олно . Регрессийн үлдэгдлийг $Y_t = a + b \cdot X_t + \varepsilon_t$ загвар дахь регрессийн алдаатай андуурахгүй байхыг сануулья!. e_t үлдэгдэл ε_t алдааны адил санамсаргүй хэмжигдэхүүн байх бөгөөд ε_t–ээс ялгаатай нь ажиглагддагт оршино.

σ^2–ын үнэлэлт нь $e_t = Y_t - \widehat{a} - \widehat{b}X_t$ үлдэгдлийн квадраатаас хамаарна:

$$\sum e_t^2 = \sum (Y_t - \widehat{a} - \widehat{b}X_t)^2 = \sum (\widehat{Y} + y_t - \widehat{a} - \widehat{b}\widehat{X} - \widehat{b}x_t)^2 = \sum (y_t - \widehat{b}x_t)^2$$

$$= \sum (bx_t + \varepsilon_t - \overline{\varepsilon} - \widehat{b}x_t)^2 = \sum x_t^2 (b - \widehat{b})^2 + 2(b - \widehat{b}) \sum x_t (\varepsilon_t - \overline{\varepsilon}) + \sum (\varepsilon_t - \overline{\varepsilon})^2.$$

Дээрх нийлбэрийн мат.дунджийг бодвол, $\mathrm{E}(\sum e_t^2) = (n-2)\sigma^2$. Иймд

$$s^2 = \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-2} \sum e_t^2 \tag{2.13}$$

үнэлэлт σ^2–ын хазайлтгүй үнэлэлт болно.

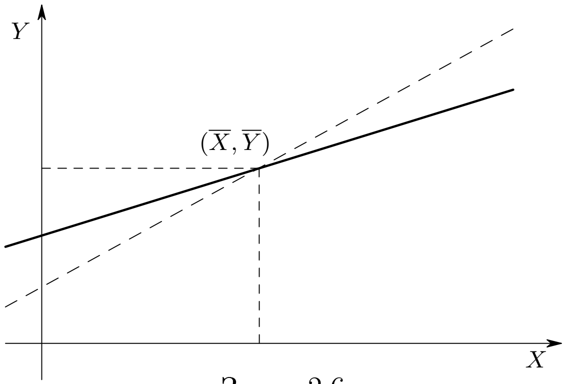
(2.10) ба (2.11) нь σ^2 дисперс мэдэгдэх үед $\widehat{a}, \widehat{b}$ үнэлэлтүүдийн дисперсийг бодох томъёо юм. Гэтэл практикт алдааны дисперс σ^2 мэдэгдэхгүй байдаг учир ажиглалтын өгөгдлөөр, a, b коэффициентуудтай хамт үнэлэх шаардлагатай болдог. Ийм учраас $\widehat{a}, \widehat{b}$ үнэлэлтүүдийн дисперсийг бодохдоо (2.10), (2.11) томъёонд σ^2–ыг s^2–аар сольж практик тооцоог хийдэг:

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{b}) &= \frac{s^2}{\sum x_t^2} = \frac{s^2}{\sum (X_t - \overline{X})^2} \\
\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{a}) &= s^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2} = \frac{s^2 \sum X_t^2}{n \sum (X_t - \overline{X})^2} \\
\widehat{\mathrm{Cov}}(\widehat{a}, \widehat{b}) &= -\frac{\overline{X}}{\sum x_t^2} s^2 = -\frac{\overline{X} s^2}{\sum (X_t - \overline{X})^2}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Регрессийн коэффициентуудын үнэлэлтийн стандарт алдааг олоход ч эдгээр томъёог ашиглана ($s_{\widehat{b}} = \sqrt{\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{b})}$).

Санамж 2.4.1. Y–ийн X–ээс хамаарах хамаарлыг судалж байгаа бөгөөд ажиглалтын тоо n өгөгдсөн, харин ажиглалтын утгууд $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$–ийг сонгох боломжтой гэж саная. Тэгвэл, өнцгийн коэффициент b–ийн үнэлэлтийн нарийвчлал хамгийн их байхаар X–ийг хэрхэн сонгон авах вэ? (2.14) томъёо ёсоор $\widehat{b}$ үнэлэлтийн дисперс $\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{b})$ нь $\sum x_t^2$ нийлбэр хичнээн их байх тутам төчнөөн бага байх нь илэрхий. Тэгвэл X_t өгөгдлүүдээс, дундаж утгынхаа орчинд илүү их сарнилтайг нь сонговол тохиромжтой болох нь харагдаж байна.

Санамж 2.4.2. (2.14) томъёоноос үзвэл сул гишүүн a болон өнцгийн коэффициент b–ийн үнэлэлтийн хувьд хэрэв, $\widehat{X} > 0$ бол $\mathrm{Cov}(\widehat{a}, \widehat{b}) < 0$ байна. Үүнийг геометрийн үүднээс авч үзвэл $Y = \widehat{a} + \widehat{b}X$ шулууны график $(\widehat{X}, \widehat{Y})$ цэгийг дайрах тул $\widehat{b}$–г өсөхөд $\widehat{a}$–ийн хэмжээ багасна (шулуун $(\widehat{X}, \widehat{Y})$ цэгийг тойрон цагийн зүүний хөдөлгөөний эсрэг эргэнэ) гэсэн үг юм (Зураг 2.6).



Зураг 2.6:

2.5 Регрессийн параметрүүдийн үнэлэлтийн статистик чанар. $b = b_0$ таамаглал шалгах. Регрессийн коэффициентуудын итгэх завсар

$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I}_n)$ гэсэн нормал, шугаман регрессийн нөхцөл биелэгдэж байг. Өөрөөр хэлбэл, ε нь олон хэмжээст хэвийн тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүн байг. Энэ тохиолдолд Y_t мөн хамтын нормал тархалттай байна. Тэгвэл, регрессийн коэффициентуудын ХБКА–аар олсон үнэлэлтүүд (цаашид товчоор ХБК-үнэлэлт гэнэ) $\widehat{a}, \widehat{b}$ нь Y_t–ээс шугаман учраас мөн хамтын нормал тархалттай байна:

$$\widehat{a} \sim N\left(a, \sigma^2 \frac{\sum X_t^2}{n \sum x_t^2}\right), \quad \widehat{b} \sim N\left(b, \sigma^2 \frac{1}{n \sum x_t^2}\right) \tag{2.15}$$

Хэрэв алдаа хэвийн тархалттай гэсэн таамаглал (нөхцөл) эс биелэгдвэл (2.15) ерөнхий тохиолдолд хүчингүй боловч, X_t–ийн төлөв тогтмол байх (*условия регулярности*) зарим нөхцөлд n–ийг өсөхөд $\widehat{a}, \widehat{b}$ үнэлэлтүүд хязгаартаа хэвийн тархалттай байна. Өөрөөр хэлбэл, $n \to \infty$ үед (2.15) биелнэ.

2.5.1 Алдааны дисперсийн үнэлэлт s^2–ын тархалт

Нормал шугаман регрессийн загварын хувьд, өөрөөр хэлбэл, $\boldsymbol{\varepsilon}$ нь олон хэмжээст хэвийн тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүн байх тохиолдолд

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2) \tag{2.16}$$

болохыг харуулдаг. Өөрөөр хэлбэл, $s^2 \sim \dfrac{\sigma^2}{n-2} \cdot \chi^2(n-2)$ буюу алдааны үнэлэлтийн дисперс s^2 нь $\dfrac{\sigma^2}{n-2}$ үржигдэхүүний нарийвчлалтайгаар $(n-2)$ чөлөөний зэрэг бүхий хи-квадрат (χ^2) тархалттай байна.

Санамж 2.5.1 (Чөлөөний зэрэг). $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, Y_{n+1}, \ldots, Y_k$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд дотор n нь хос хосоороо хамааралгүй, үлдсэн $(n-k)$ нь ямар нэг шугаман холбоотой (шугаман хамааралтай) бол $\sum\limits_{i=1}^{k} Y_i^2$–квадратуудын нийлбэрийг n чөлөөний зэрэгтэй гэнэ. Жишээлбэл, санамсаргүй хэмжигдэхүүн дээр ажиглалт хийж $X_1, X_2, \ldots, X_n$ утгуудыг гарган авсан гэвэл $Y_i = X_i - \overline{X}$ хазайлтуудын хувьд $\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^2$ нийлбэр нь $(n-1)$ чөлөөний зэрэгтэй байна. Учир нь $Y_i = X_i - \overline{X}$ хэмжигдэхүүнүүдийн хооронд $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n$ гэсэн холбоо оршино! $(\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i = 0)$.

Хэрэв дээрх квадратуудын нийлбэрийг чөлөөний зэрэгт нь хуваавал гарсан хэмжигдэхүүн нь σ^2 дисперсийн хазайлтгүй үнэлэлт байна:

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = s^2.$$

Санамж 2.5.2 ($\chi^2(n)$ тархалт). $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$–үл хамаарах, стандарт хэвийн тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд бол $(\forall i\ (i = \overline{1,n}),\ \varepsilon_i \sim N(0,1))$ $\chi^2(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$–хэмжигдэхүүнийг n чөлөөний зэрэг бүхий хи-квадрат тархалттай гэнэ ($\mathrm{E}\chi^2(n) = n$, $\mathrm{V}\chi^2(n) = 2n$).

2.5.2 $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, s^2–үнэлэлтүүдийн үл хамаарах чанар

Алдааны дисперсийн үнэлэлт s^2 нь регрессийн үлдэгдэл e_t–ээс хамаарсан функц учир s^2 ба $(\widehat{a}, \widehat{b})$–г хамааралгүй гэж батлахын тулд e_t ба $(\widehat{a}, \widehat{b})$–г хамааралгүй гэж батлахад хангалттай. Нормал шугаман регрессийн загварын нөхцөлд $\forall\ t$ хувьд $\mathrm{Cov}(e_t, \widehat{b}) = 0, \mathrm{Cov}(e_t, \widehat{a}) = 0$ болохыг хялбархан баталж болно. Энэ нь e_t ба $\widehat{b}$, e_t ба $\widehat{a}$ хэмжигдэхүүнүүд корреляц хамааралгүй гэсэн үг. Тэгвэл “хэвийн тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд корреляц хамааралгүй бол статистик хамааралгүй” гэсэн үр дүнг ашиглавал e_t ба $\widehat{b}$, e_t ба $\widehat{a}$, мөн $\widehat{a}$ ба $\widehat{b}$ статистик хамааралгүй. Ийнхүү ХБК-үнэлэлтүүд болох $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, s^2 нь хос хосоороо статистик хамааралгүй хэмжигдэхүүнүүд байна.

2.5.3 $\mathbf{H_0}:\ b = b_0$ таамаглал шалгах

(2.15)–аас $\widehat{b} - b \sim N(0, \sigma_{\widehat{b}}^2)$. Үүнд, $\sigma_{\widehat{b}}^2 = \widehat{\mathrm{V}}(\widehat{b}) = \sigma^2 / \sum x_t^2$. Хэрэв $\widehat{b}$ хэмжигдэхүүнийг нормчилбол $N(0,1)$ тархалттай болно: $\dfrac{\widehat{b} - b}{\sigma_{\widehat{b}}^2} \sim N(0,1)$.

(2.16)–аас $\dfrac{s^2}{\sigma^2} \sim \dfrac{1}{n-2}\chi^2(n-2)$ буюу $\dfrac{s}{\sigma} \sim \sqrt{\dfrac{1}{n-2}\chi^2(n-2)}$.

Хэрэв $\dfrac{\widehat{b}-b}{\sigma^2_{\widehat{b}}}$ ба $\dfrac{s}{\sigma}$ хэмжигдэхүүний ноогдворыг авч үзвэл $(n-2)$ чөлөөний зэрэг бүхий Стьюдентийн тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүн байна:

$$t = \frac{\widehat{b}-b/\sigma^2_{\widehat{b}}}{s/\sigma} \sim t(n-2).$$

$\dfrac{\sigma_{\widehat{b}}}{\sigma} = \dfrac{s_{\widehat{b}}}{s}$ буюу $\dfrac{\sigma}{s} = \dfrac{\sigma_{\widehat{b}}}{s_{\widehat{b}}}$ болохыг тооцвол

$$t = \frac{\widehat{b}-b}{s_{\widehat{b}}} \sim t(n-2). \tag{2.17}$$

Дээрхийн адилаар

$$t = \frac{\widehat{a}-a}{s_{\widehat{a}}} \sim t(n-2). \tag{2.18}$$

Ийнхүү алдаа хэвийн тархалттай тохиолдолд регрессийн шулууны нормчлогдсон ХБК-үнэлэлтүүд Стьюдентийн тархалттай байх нь. Харин x_t–ийн төлөв тогтмол байх зарим тохиолдолд алдааг хэвийн тархалттай гэж шаардахгүйгээр (2.17), (2.18) хэмжигдэхүүн бүр хязгаартаа хэвийн тархалттай байдаг болохыг тэмдэглэе.

$\mathbf{H_0}: b = b_0$ таамаглалыг $\mathbf{H_1}: b \neq b_0$ өрсөлдөгч таамаглалын нөхцөлд шалгах үед дээрх (2.17), (2.18) статистикийг ашиглана. $(n-2)$ чөлөөний зэрэг бүхий t-тархалтын, тухайлбал 95%-ийн квантил t_c бол $\mathbf{H_0}$ таамаглал үнэн байхын тулд

$$P\left\{-t_c < \frac{\widehat{b}-b_0}{s_{\widehat{b}}} < t_c\right\} = 0.95$$

нөхцөл биелнэ. Хэрэв $|t| > t_c$ бол 5%-ийн итгэх түвшинтэйгээр $\mathbf{H_0}$ таамаглалыг үгүйсгэнэ ($\mathbf{H_1}$ таамаглалыг хүлээн авна). Эсрэг тохиолдолд $\mathbf{H_0}$ таамаглалыг хүлээн зөвшөөрнө. $P\{|(\widehat{b}-b)/s_{\widehat{b}}| < t_c\} = 0.95$ тэнцэтгэлийг

$$P\{\widehat{b} - t_c s_{\widehat{b}} < b < \widehat{b} + t_c s_{\widehat{b}}\} = 0.95$$

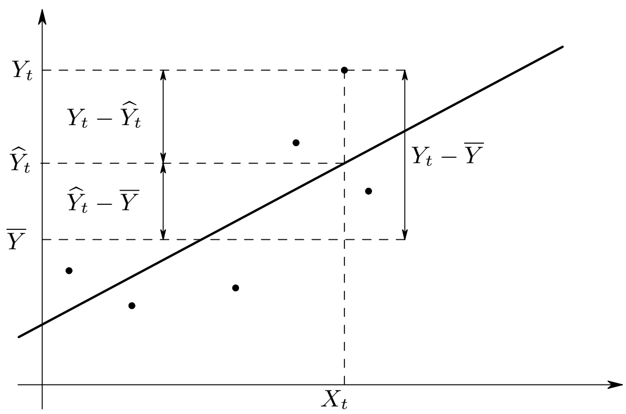
хэлбэрт бичвэл $[\widehat{b} - t_c s_{\widehat{b}}\ ,\ \widehat{b} + t_c s_{\widehat{b}}]$ нь b–ийн 95%–ийн итгэх завсар болно. Итгэх завсар b параметрийн жинхэнэ утгыг өгөгдсөн итгэх магадлалтайгаар хучна (манай тохиолдолд $p = 0.95$).

$\mathbf{H_0}: b = 0$ таамаглалын үед $t = \widehat{b}/s_{\widehat{b}}$ болох тул t-статистик илүү хялбар болно. Регрессийн шинжилгээ хийх компьютерийн багц программуудад энэ утгыг ихэвчлэн оруулсан байдаг. $|t| > t_c$ нөхцөл биелэгдвэл (5%–ийн итгэх түвшний хувьд $t_c \approx 2$) регрессийн коэффициент тэгээс ялгаатай гэсэн дүгнэлт гарах ба улмаар X нь Y–д ямар нэг статистик нөлөө үзүүлэхийг илэрхийлнэ. Харин t-статистикийн бага утгууд нь тайлбарлагч хувьсагч X ба хамааран хувьсагч Y–ийн хооронд мэдэгдэхүйц статистик холбоо байхгүй болохыг илэрхийлнэ.

2.6 Регресс дахь хамааран хувьсагчийн вариацийн шинжилгээ. Детерминацийн коэффициент

Y_t утгууд дундаж утгаасаа хазайх хазайлтын квадратын нийлбэр болох $\sum(Y_t-\overline{Y})^2$ –вариацийг авч үзье. Вариацийг, регрессийн тэгшитгэлээр тайлбарлагдах, үл тайлбарлагдах (өөрөөр хэлбэл: ε_t алдаатай холбоотой) гэсэн хоёр хэсэгт хуваая.

Y_t–ийн прогнозын утгыг $\widehat{Y}_t = \widehat{a} + \widehat{b}X_t$ гэвэл $Y_t - \overline{Y} = (Y_t - \widehat{Y}_t) + (\widehat{Y}_t - \overline{Y})$ (Зураг 2.7). Тэгвэл, Y_t–ийн вариац дараах 3 нийлбэрээс тогтоно:



Зураг 2.7:

$$\sum(Y_t - \overline{Y})^2 = \sum(Y_t - \widehat{Y}_t)^2 + \sum(\widehat{Y}_t - \overline{Y})^2 + 2\sum(Y_t - \widehat{Y}_t)(\widehat{Y}_t - \overline{Y}) \tag{2.19}$$

$\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{e}$–регрессийн үлдэгдлийн вектор $\boldsymbol{\imath}$ тогтмол ба $\boldsymbol{x}$ векторт ортогональ учраас дээрх нийлбэрийн 3–р нэмэгдэхүүн тэгтэй тэнцүү. Иймд

$$\underset{\text{TSS}}{\sum(Y_t - \overline{Y})^2} = \underset{\text{ESS}}{\sum(Y_t - \widehat{Y}_t)^2} + \underset{\text{RSS}}{\sum(\widehat{Y}_t - \overline{Y})^2}\,. \tag{2.20}$$

Үүнд,

TSS–нийт дисперс (*total sum of squares*),

ESS–регрессээр үл тайлбарлагдах дисперс (*error sum of squares*),

RSS–регрессээр тайлбарлагдах дисперс (*regression sum of squares*).

Санамж 2.6.1. Тогтмол векторыг тайлбарлагч параметрийн тоонд оруулсан нөхцөлд л үлдэгдлийн вектор тогтмол векторт $\perp$ байна ($\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{e} = \sum e_t = 0$). Иймучраас зөвхөн, тогтмол векторыг үл хамаарах хувьсагчтай нэгтгэсэн тохиолдолд (2.20) томъёо хүчинтэй байна.

2.6.1 Детерминацийн коэффициент–R^2

Тодорхойлолт 2.6.1.

$$R^2 = 1 - \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} = \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} \tag{2.21}$$

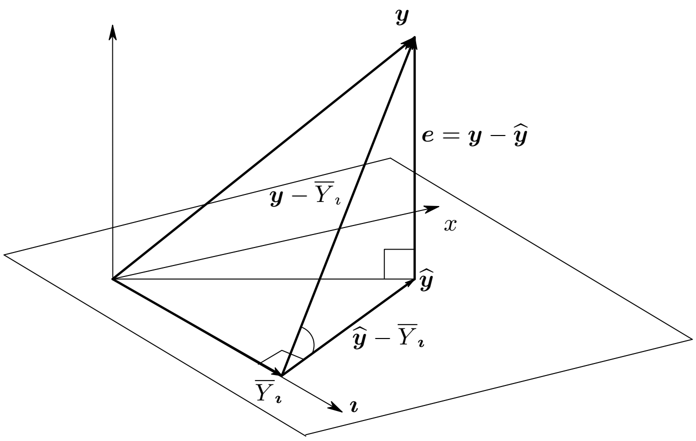
хэмжигдэхүүнийг детерминацийн коэффициент буюу дисперсээр тайлбарлагдах хувь гэнэ.

(2.21) томъёоны 2–р тэнцэтгэл зөвхөн, тогтмолыг регрессийн хувьсагчид оруулсан тохиолдолд биелэгдэхийг тэмдэглэе.

Детерминацийн коэффициентийн тодорхойлолтоос $0 \leq R^2 \leq 1$. Хэрэв $R^2 = 0$ бол регрессийн тэгшитгэл, $\widehat{Y}_t = \overline{Y}$ гэсэн илэрхий зүйлээс өөр юуг ч эс өгнө. Харин $R^2 = 1$ бол регрессийн тэгшитгэлээр бүх зүйл тайлбарлагдана: ажиглалтын бүх цэгүүд регрессийн шулуун дээр орших ба бүх $e_t = 0$. Иймд R^2–ын утга 1–д хичнээн ойр байх тутам регресс бодит байдлыг нарийн дүрслэнэ. Энэ нь геометр утгаараа, $\widehat{\boldsymbol{y}}$ вектор $\boldsymbol{y}$ векторт илүү нарийн дөхнө гэсэн үг юм. Регрессийн чанарыг үнэлэхэд R^2 коэффициентийг хэрхэн ашиглах тухай дараагийн Бүлэг 3–т дэлгэрүүлж авч үзэх болно.

2.6.2 R^2 коэффициентийн геометр тайлбар

(2.2)–д авч үзсэн, регрессийн геометр тайлбартаа эргэж оръё. $\overline{Y}\boldsymbol{\imath}$ вектор нь $\boldsymbol{y}$ векторын $\boldsymbol{\imath}$ дээрх ортогональ проекц болно. Харин $\widehat{\boldsymbol{y}}$ вектор $\boldsymbol{y}$ векторын $(\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{x})$ хавтгай дээрх ортогональ проекц байна (Зураг 2.8). Гурван перпендикулярын теорем ёсоор $\widehat{\boldsymbol{y}}$ векторын $\boldsymbol{\imath}$ дээрх ортогональ проекц нь $\overline{Y}\boldsymbol{\imath}$ вектортой давхцана. Тэгвэл, (2.20) тэнцэтгэл нь $\widehat{\boldsymbol{y}} - \overline{Y}\boldsymbol{\imath}$, $\boldsymbol{y} - \overline{Y}\boldsymbol{\imath}$, $\boldsymbol{e}$ талуудтай тэгш өнцөгт гурвалжны хувь дахь Пифагорын теорем юм. Өөрөөр хэлбэл, $\| \boldsymbol{y} - \overline{Y}\boldsymbol{\imath} \|^2 = \| \boldsymbol{e} \|^2 + \| \widehat{\boldsymbol{y}} - \overline{Y}\boldsymbol{\imath} \|^2$. Иймучраас $R^2 = \mathrm{RSS}/\mathrm{TSS} = \cos^2 \varphi$, Үүнд, φ – $(\widehat{\boldsymbol{y}} - \overline{Y}\boldsymbol{\imath})$ ба $(\boldsymbol{y} - \overline{Y}\boldsymbol{\imath})$ векторуудын



Зураг 2.8:

хоорондох өнцөг.

Санамж 2.6.2. R^2 нь Y_t, $\widehat{Y}_t$ хувьсагчдын хоорондох түүврийн корреляцийн коэффициентийн квадраттай тэнцүү.

2.6.3 F-статистик (Фишерийн шинжүүр)

Дахин, нормал шугаман регрессмйн загвар авъя. (2.15), (2.16) томъёоноос:

$$\frac{\widehat{b} - b}{s_{\widehat{b}}} = \frac{\widehat{b} - b}{\sigma / \sqrt{\sum x_t^2}} \sim N(0, 1);$$

$$\frac{(n-2)s^2}{\sigma^2} = \frac{\sum e_t^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-2).$$

s^2, $\widehat{b}$–г хамааралгүй гэж дээр баталсан тул χ^2 болон Фишерийн тархалтын тодорхойлолт ёсоор:

$$F = \frac{\left(\dfrac{\widehat{b}-b}{\sigma_{\widehat{b}}}\right)^2 \dfrac{1}{1}}{\dfrac{\sum e_t^2}{\sigma^2}\dfrac{1}{n-2}} = \frac{(\widehat{b}-b)^2 \sum x_t^2}{\sum e_t^2/(n-2)} \sim \frac{\dfrac{1}{1}\chi(1)^2}{\dfrac{1}{n-2}\chi^2(n-2)} = F(1, n-2) \tag{2.22}$$

Гарган авсан F-статистикийг $\mathbf{H_0}: b - b_0 = 0$ гэсэн тэг таамаглал шалгахад ашиглана. Энэ таамаглалын үед (2.22) статистик дараах хэлбэртэй болно.

$$F = \frac{(\widehat{b}-b_0)^2 \sum x_t^2}{\sum e_t^2/(n-2)} \sim F(1, n-2) \tag{2.23}$$

Хэрэв тэг таамаглал үнэн бол (2.23)–ын F утга бага байна. Хэрэв F утга, өгөгдсөн итгэх түвшин α–ийн хувьд $(1, n-2)$ параметрүүд бүхий Фишерийн тархалтын критик утга $F_\alpha(1, n-2)$–аас их байвал тэг таамаглалыг хэрэгсэхгүй.

(2.23) статистик $\mathbf{H_0}: b = 0$ таамаглалын хувьд хялбарчлагдана (X, Y–ийн хооронд шугаман функционал холбоогүй тохиолдол). Энэ тохиолдолд (2.23) томъёог вектор хэлбэрээр бичвэл дараах хэлбэртэй болно.

$$F = \frac{\widehat{\boldsymbol{y}}_*'\widehat{\boldsymbol{y}}_*}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-2)} \qquad \left(\sum(\widehat{y}_t)^2 = \widehat{\boldsymbol{y}}_*'\widehat{\boldsymbol{y}}_*\right). \tag{2.24}$$

Детерминацийн коэффициентийг хазайлтаар илэрхийлэн бичвэл

$$R^2 = \frac{\widehat{\boldsymbol{y}}_*'\widehat{\boldsymbol{y}}_*}{\boldsymbol{y}_*'\boldsymbol{y}_*} = \frac{\widehat{\boldsymbol{y}}_*'\widehat{\boldsymbol{y}}_*}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} + \widehat{\boldsymbol{y}}_*'\widehat{\boldsymbol{y}}_*}. \tag{2.25}$$

(2.24), (2.25)–аас F-статистик ба R^2 коэффициентийн холбоог илэрхийлбэл

$$F = (n-2)\frac{R^2}{1-R^2} = (n-2)\frac{\text{RSS}}{\text{ESS}} \tag{2.26}$$

F–ийн бага утгуудад R^2–ын бага утга харгалзана.

Санамж 2.6.3. (2.17) ба (2.23)–г харьцуулбал $F = t^2$ болохыг харж болно. Өөрөөр хэлбэл, t ба F статистикийг ашиглан $\mathbf{H_0}$ таамаглалыг шалгахад нэг хэмжээст регрессийн загварын хувьд адил үр дүн өгнө.

2.7 Регрессийн коэффициентийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

ХБКА–аас гадна, шугаман регресийн параметрүүдийг үнэлэх өөр арга нь хамгийн их үнэний хувь бүхий арга юм (*Method of Maximum Likelihood* ML). Энэ аргын тухай хожим XI бүлэгт авч үзэх бөгөөд энэ хэсэгт зөвхөн хос регрессийн хувьд хэрхэн хэрэглэх талаар дурдъя.

Нормал шугаман регрессийн

$$Y_t = a + bX_t + \varepsilon_t \tag{2.27}$$

загварын параметрүүдийг олох зорилго тавья. Регрессийн бүх ε_t алдаа хамааралгүй бөгөөд хэвийн тархалттай гэе:

$$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2). \tag{2.28}$$

Эквивалент хэлбэрээр бичвэл $Y_t \sim N(a + bX_t, \sigma^2)$.

Туршилтын (X_t, Y_t), $t = 1, 2, \ldots, n$ утгуудын хувьд "(2.27)÷(2.28) загварын a, b, σ^2 параметрүүдийн хамгийн их магадлалтай утгууд хэд вэ?" гэсэн асуултанд хариулах зорилго тавья. Үүний тулд, ажиглалт бүрийн магадлалын нягтуудын үржвэртэй тэнцүү, "хамгийн их үнэний хувь бүхий" гэж нэрлэгдэх дараах функцийг зохиоё:

$$L(Y_1, \ldots, Y_n, a, b, \sigma^2) = P(Y_1, \ldots, Y_n | X_1, \ldots, X_n, a, b, \sigma^2) = \prod_{t=1}^{n} P(Y_t)$$

$$= (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (Y_t - a - bX_t)^2\right). \tag{2.29}$$

Үүнд, $P-$ нь X_t, Y_t болон a, b, σ^2 параметрүүдээс хамаарсан магадлалын нягт. Параметрүүдийн хамгийн их магадлалтай утгыг олно гэдэг нь, L функцийг максимумд нь хүргэх утгуудыг олно гэсэн үг. L ба $\ln L$ функц ижилхэн цэгүүд дээр максимум утгаа авах учраас $\ln L$ функцийн максимумыг олоход хангалттай.

$$\ln L(Y_1, \ldots, Y_n, a, b, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum (Y_t - a - bX_t)^2. \tag{2.30}$$

$\ln L$ функцийн экстремум орших зайлшгүй нөхцлийг бичвэл:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2} \sum (Y_t - a - bX_t) = 0 \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial b} = \frac{1}{\sigma^2} \sum X_t (Y_t - a - bX_t) = 0 \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2} \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum X_t (Y_t - a - bX_t)^2 = 0 \tag{2.33}$$

(2.31)÷(2.33) тэгшитгэлийн сиситемийн шийд нь хамгийн их үнэний хувь бүхий MLүнэлэлтүүд болно:

$$\widehat{b}_{\mathrm{ML}} = \frac{\sum x_t y_t}{x_t^2}; \qquad \widehat{a}_{\mathrm{ML}} = \overline{Y} - \widehat{b}_{\mathrm{ML}} \overline{X}; \quad \widehat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}} = \frac{1}{n} \sum e_t^2. \tag{2.34}$$

a, b параметрүүдийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтүүд ХБКА–аар олсон үнэлэлтүүдтэй давцана: $\widehat{a}_{\mathrm{ML}} = \widehat{a}_{\mathrm{OLS}}$, $\widehat{b}_{\mathrm{ML}} = \widehat{b}_{\mathrm{OLS}}$. Харин σ^2–ын хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт нь $\widehat{\sigma}^2_{\mathrm{OLS}} = \sum e_t^2/(n-2)$–той давхцахгүй байна. Учир нь, $\widehat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}}$–хазайлттай. Иймхүү $\widehat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}} = \dfrac{n-2}{n} \cdot \widehat{\sigma}^2_{\mathrm{OLS}}$ нь хазайлттай боловч зохимжтой үнэлэлт болно.

Жишээ. Өрхийн орлого. ОХУ–ын Статистикийн Улсын Хороо, Социологийн хүрээлэн, Хүнсний хүрээлэнгүүд АНУ–ын Хойд Каролины Их Сургуультай хамтран 1995 оны намар ОХУ–ын 3594 өрхөд судалгаа хийжээ. Энэ үр дүнг ашиглан өрхийн орлого, зардлын хамаарлыг тогтоох зорилгоор дараах регрессийн тэгшитгэлийг гарган авчээ.

Inc–өрхийн бодит орлого, *Expend*–өрхийн бодит зардал.

$$Expend = \underset{(233.6)}{4663.3} + \underset{(0.0223)}{0.686}\ Inc\ , \quad R^2 = 0.21, \quad s = 11307.$$

Хаалтанд регрессийн коэффициентуудын стандарт алдааг тэмдэглэв. Коэффициентуудын t-статистикийн (t-шинжүүрийн) утга харгалзан 19.36 ба 30.81. Өөрөөр хэлбэл, коэффициентууд тэгээс мэдэгдэхүйц ялгагдаж буй учир нөлөөтэй. Гэвч детерминацийн коэффициент R^2–ын утга бага байна. Энэ нь, өрхийн гишүүдийн бүрэлдэхүүн, оршин суугаа газар, зардлын бүтэц өөр өөр байгаагаар, өөрөөр хэлбэл өгөгдлүүд нэгэн төрлийн биш байснаар тайлбарлагдана. Харин илүү нэгэн төрлийн түүврийн хувьд детерминацийн коэффициент ихсэж болох юм. Тухайлбал, зөвхөн 1 ам бүлтэй 509 өрхийн хувьд регрессийн тэгшитгэл:

$$Expend = \underset{(182.0)}{3229.2} + \underset{(0.0162)}{0.355}\ Inc\ , \quad R^2 = 0.39, \quad s = 4567.$$

t-статистикийн утгууд 17.74 ба 20.70 гарсан тул өмнөхийн адилаар коэффициентууд нөлөөтэй. Харин R^2 коэффициент 0.21–ээс 0.39 хүртэл өсөж, алдааны стандарт хазайлт 11307–оос 4567 хүртэл буурсан тул бидний хүссэн ёсоор регрессийн тайлбарлах чадвар өссөн. Үүнийг, 1 ам бүлтэй өрхийн хувьд хүүхэд, хөгшид гэх мэт өөр гишүүнд зардал гардаггүй учраас орлогынхоо багахан хэсгийг хүнсний хэрэгцээнд зарцуулдгаар тайлбарлаж болно.
$\partial Expend/\partial Inc$ нь хэрэглээний хэлбийлтийг тодорхойлох бөгөөд 1 ам бүлтэй өрхийн хувьд 0.355, нийт түүврийн хувьд 0.686 гарсан.

Nf–ээр өрхийн ам бүлийн тоог тэмдэглэе. $n = 3594$ үед өрхийн 1 гишүүний дундаж орлогоос өрхийн 1 гишүүний дундаж зардал хамаарах регрессийг үнэлье:

$$Expend/Nf = \underset{(76.8)}{2387.2} + \underset{(0.0133)}{0.447}\ Inc\ /Nf, \quad R^2 = 0.24, \quad s = 4202.$$

Эхний регрессийг бодвол R^2–ын утга өсөж, харин алдааны дисперс багассан үр дүн гарч байна.

2.8 Бататгах дасгал, бодлого

Бодлого 2.1. (X, Y) хэмжигдэхүүний 16 хос утгаар дараах үр дүнг гарган авчээ.
$\sum Y^2 = 526, \ \sum X^2 = 657, \ \sum XY = 492, \ \sum Y = 64, \ \sum X = 96.$
$Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon$ регрессийг үнэлж, $\mathbf{H_0} : \beta = 1.0$ таамаглалыг шалга.

Бодолт. 1) Регрессийн параметрийн үнэлэлтүүд (2.4), (2.5) томъёо ёсоор

$$\widehat{\beta} = \frac{n\sum X_tY_t - (\sum X_t)(\sum Y_t)}{n\sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{16 \cdot 492 - 96 \cdot 64}{16 \cdot 657 - 96^2} = \frac{4}{3} = 1.33,$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum Y_t - \frac{1}{n}\sum X_t \cdot \widehat{\beta} = \overline{Y} - \overline{X}\cdot\widehat{\beta} = \frac{64}{16} - \frac{96}{16}\cdot\frac{4}{3} = -4.$$

Үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэрийг бодвол:

$$\sum e_t^2 = \sum (Y_t - (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}X_t))^2 = \sum\left[Y_t^2 - 2Y_t(\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}X_t) + (\widehat{\alpha} + \widehat{\beta}X_t)^2\right]$$

$$= \sum Y_t^2 - 2\widehat{\alpha}\sum Y_t - 2\widehat{\beta}\sum Y_t X_t + n\widehat{\alpha}^2 + 2\widehat{\alpha}\widehat{\beta}\sum X_t + \widehat{\beta}^2\sum X_t^2 = 126.$$

Алдааны дисперсийн үнэлэлт (2.13) томъёо ёсоор:

$$\widehat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-2}\sum e_t^2 = \frac{126}{14} = 9.$$

2) $\widehat{\beta}$–ийн дисперсийн үнэлэлт

$$s_{\widehat{\beta}}^2 = \frac{s^2}{\sum x_t^2} = \frac{s^2}{\sum (X_t - \overline{X})^2} = \frac{9}{657 - 96^2/16} = \frac{1}{9} \quad \text{тул}$$

$\mathbf{H_0}$ таамаглалыг шалгахын тулд (2.17) статистикийг ашиглана.

$$t = \frac{\widehat{\beta} - \beta_0}{s_{\widehat{\beta}}} = \frac{4/3 - 1}{1/3} = 1.$$

t-статистикийн 95%–ийн критик утга нь 2.145 учраас ($|t| = 1 < t_k = 2.145$) $\mathbf{H_0}$: $\beta = 1.0$ таамаглал 5%–ийн итгэх түвшний хувьд няцаагдахгүй.

Бодлого 2.2. $\widehat{\beta}$ нь Y–ийн X дээрх регрессийн шулууны өнцгийн коэффициент, $\widehat{\gamma}$ нь X–ийн Y дээрх регрессийн өнцгийн коэффициент бол $R^2 = 1$ байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\widehat{\beta} = 1/\widehat{\gamma}$ болохыг үзүүл.

Бодолт. Хазайлтаар илэрхийлсэн тэгшитгэл (2.7)–г ашиглавал хялбар болно:

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}, \quad \widehat{\gamma} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum y_t^2} \;\Rightarrow\; \widehat{\beta}\widehat{\gamma} = \frac{(\sum x_t y_t)^2}{\sum x_t^2 \sum y_t^2}.$$

$\widehat{y}_t = \widehat{Y}_t - \overline{Y} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}X_t - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta}\overline{X} = \widehat{\beta}x_t$ тул (2.25) ёсоор:

$$R^2 = \frac{\widehat{\boldsymbol{y}}_*'\widehat{\boldsymbol{y}}_*}{\boldsymbol{y}_*'\boldsymbol{y}_*} = \frac{\widehat{\beta}^2\sum x_t^2}{\sum y_t^2} = \left(\frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}\right)^2 \frac{\sum x_t^2}{\sum y_t^2} = \frac{(\sum x_t y_t)^2}{\sum x_t^2 \sum y_t^2}.$$

Эндээс $R^2 = \widehat{\beta}\widehat{\gamma}$. Иймд, $R^2 = 1$ нөхцөл нь $\widehat{\beta} = 1/\widehat{\gamma}$ нөхцөлтэй эквивалент юм. Энэхүү үр дүн нь геометр утгаараа, харгалзах регрессийн шулууны өнцгийн коэффициентуудын үржвэр зөвхөн, $\boldsymbol{y}$ вектор нь нэгж ба $\boldsymbol{x}$ вектороор байгуулсан хавтгай дээр орших үед 1–тэй тэнцүү байхыг илэрхийлнэ. Өөрөөр хэлбэл, ажиглалтын (туршилтын) бүх цэгүүд регрессийн шулуун дээр оршино гэсэн үг.

Бодлого 2.3. $Y_t = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$ регрессийн хамааран хувьсагч нь 2 нэмэгдэхүүнд задарсан байг: $Y_t = Y_{1t} + Y_{2t}$. Нэмэгдэхүүн бүрийн хувьд дараах 2 регрессийг авч үзье: $Y_{1t} = \alpha_1 + \beta_1 X_t + \varepsilon_{1t}$, $Y_{2t} = \alpha_2 + \beta_2 X_t + \varepsilon_{2t}$. Эдгээр 3 регрессийн ХБК-үнэлэлтийн хувьд дараах харьцаа биелэхийг үзүүл: $\widehat{\alpha} = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2$, $\widehat{\beta} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2$.

Бодолт. Шугаман регрессийн коэффициентуудыг олох томъёонд Y_t–ийн задаргааг орлуулбал:

$$\widehat{\beta} = \frac{n\sum X_t(Y_{1t}+Y_{2t}) - \left(\sum X_t\right)\left(\sum(Y_{1t}+Y_{2t})\right)}{n\sum X_t^2 - \left(\sum X_t\right)^2}$$

$$= \frac{n\sum X_tY_{1t} - \left(\sum X_t\right)\left(\sum Y_{1t}\right)}{n\sum X_t^2 - \left(\sum X_t\right)^2} + \frac{n\sum X_tY_{2t} - \left(\sum X_t\right)\left(\sum Y_{2t}\right)}{n\sum X_t^2 - \left(\sum X_t\right)^2} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2.$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum(Y_{1t}+Y_{2t}) - \frac{1}{n}\sum X_t(\widehat{\beta}_1+\widehat{\beta}_2)$$

$$= \frac{1}{n}\sum Y_{1t} - \frac{1}{n}\sum X_t\widehat{\beta}_1 + \frac{1}{n}\sum Y_{2t} - \frac{1}{n}\sum X_t\widehat{\beta}_2 = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2.$$

Бодлого 2.4. Түүврийн

X	5	11	15	17	20	22	25	27	30	35
Y	70	65	55	60	50	35	40	30	25	32

өгөгдлөөр дараах хэмжигдэхүүнүүдийг ол.

а) Y_t–ийн X_t дээрх, сул гишүүн бүхий регрессийн детерминацийн коэффициент;

б) Y_t–ийн X_t дээрх сул гишүүнгүй регрессийн детерминацийн коэффициент;

в) y_t–ийн x_t дээрх, сул гишүүн бүхий регрессийн детерминацийн коэффициент, Үүнд y_t, x_t нь Y_t ба X_t–ийн дунджаасаа хазайх хазайлтууд;

г) y_t–ийн x_t дээрх, сул гишүүнгүй регрессийн детерминацийн коэффициент.

Бодолт. а) Y_t–ийн X_t дээрх, сул гишүүн бүхий регрессийн тэгшитгэл $Y_y = \alpha + \beta X_t + \varepsilon_t$ хэлбэртэй. (2.4), (2.5) томъёо ёсоор $\widehat{\beta}, \widehat{\alpha}$ үнэлэлтүүдийг олбол:

$$\widehat{b} = \frac{n\sum X_tY_t - (\sum X_t)(\sum Y_t)}{n\sum X_t^2 - (\sum X_t)^2} = \frac{10\cdot 8360 - 207\cdot 462}{10\cdot 5023 - 207^2} \approx -1.63,$$

$$\widehat{a} = \overline{Y} - \overline{X}\cdot\widehat{b} = 46.2 - 20.7\cdot(-1.63) = 79.95.$$

Иймд, $\widehat{Y_t} = 79.95 - 1.63X_t$. Детерминацийн коэффициентийг бодвол

$$R^2 = \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} = \frac{\sum(\widehat{Y}_t - \overline{Y})^2}{\sum(Y_t - \overline{Y})^2} = \frac{1962.0}{2279.6} = 0.8607.$$

б) Y_t–ийн X_t дээрх, сул гишүүнгүй регрессийн тэгшитгэл $Y_y = \beta X_t + \varepsilon_t$ хэлбэртэй бөгөөд $\widehat{\beta}$ үнэлэлт дараах томъёогоор олдоно.

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum Y_tX_t}{\sum X_t^2} = \frac{8360}{5023} = 1.66.$$

Сул гишүүнгүй регрессийн хувьд TSS = ESS+RSS тэнцэтгэл биелэгдэхгүй учраас детерминацийн коэффициентийг зөвөөр тодорхойлох боломжгүй. Тухайлбал, манай тохиолдолд R^2–ыг дараах 2 аргаар олох боломжтой.

$$R^2_{(1)} = \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} = \frac{3424.7}{2279.6} = 1.50,$$

$$R^2_{(2)} = 1 - \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} = 1 - \frac{9710.1}{2279.6} = -3.26.$$

Энэ тохиолдолд R^2–ын утга $(0;1)$ интервалд харьяалагдах албагүй байна!

в), г) y_t–ийн x_t дээрх регрессийн тэгшитгэл а) хэсэгт авч үзсэнтэй адил. Учир нь, эдгээр 3 тохиолдолд цэгүүдийн харилцан байршил болон регрессийн шулуунууд давхцана. Ийнхүү $R^2 = 0.8607$. в) тохиолдолд регрессийн шулуун координатын эхийг дайрах учраас в), г) тохиолдлууд давхцана.

Бодлого 2.5. Тогтмол регрессийн дараах загварыг авч үзье:

$$Y_t = \alpha + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n.$$

а) α, σ^2–параметрүүдийн ХБК-үнэлэлтийг ол.

б) $\widehat{\alpha}$ үнэлэлтийн дисперсийг ол.

в) $\dfrac{\widehat{\alpha} - \alpha}{s_{\widehat{\alpha}}}$ статистик $t(n-1)$ тархалттай болохыг үзүүл.

г) детерминацийн коэффициент R^2 хэдтэй тэнцүү вэ?

Бодолт. а) Бодлого, үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэрийн минимумыг олох асуудалд шилжинэ:

$$F(\alpha) = \sum (Y_t - \alpha)^2 \longrightarrow \min.$$

Экстремумын зайлшгүй нөхцөл ёсоор

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum (Y_t - \alpha)^2 = 0 \ \text{ буюу } \quad \sum (Y_t - \alpha) = 0.$$

Энэ тэгшитгэлийг бодож, α–ийн ХБК-үнэлэлтийг олбол:

$$\widehat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum Y_t = \overline{Y}.$$

σ^2–ын үнэлэлтийг олохын тулд үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэрийг авч үзье:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum (Y_t - \overline{Y})^2\right) &= \mathrm{E}\left(\sum (\varepsilon_t - \overline{\varepsilon})^2\right) = \mathrm{E}\left(\sum (\varepsilon_t^2 + \overline{\varepsilon}^2 - 2\varepsilon_t \overline{\varepsilon})\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\sum \varepsilon_t^2 + n\overline{\varepsilon}^2 - 2\sum \varepsilon_t \overline{\varepsilon}\right) = \mathrm{E}\left(\sum \varepsilon_t^2 + n\overline{\varepsilon}^2 - 2n\overline{\varepsilon}^2\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\sum \varepsilon_t^2 - n\overline{\varepsilon}^2\right) = n\sigma^2 - n\frac{\sigma^2}{n} = (n-1)\sigma^2.
\end{aligned}$$

Эндээс,

$$\widehat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum e_t^2 = \frac{1}{n-1} \sum (Y_t - \overline{Y})^2 \quad \text{нь } \sigma^2\text{–ын хазайлтгүй}$$

үнэлэлт болох нь харагдана.

б) $\mathrm{V}(\widehat{\alpha}) = \mathrm{V}\left(\dfrac{1}{n} \sum Y_t\right) = \dfrac{1}{n^2} n \mathrm{V}(Y_t) = \dfrac{1}{n} \sigma^2.$

в) Алдаа хэвийн тархалттай байх тухай ($\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$) нэмэлт нөхцөл биелэгдэж байг. Тэгвэл $\widehat{\alpha}$ үнэлэлт мөн хэвийн тархалттай байна: $\widehat{\alpha} \sim N(0, \sigma^2/n)$. (2.17) томъёоны гаргалгааны адилаар

$$\frac{(\overline{Y} - \alpha)\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (Y_t - \overline{Y})^2}} \sim t(n-1).$$

$\mathrm{V}(\widehat{\alpha}) = s^2_{\widehat{\alpha}} = s^2/n$ учир

$$\frac{(\overline{Y}-\alpha)\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum(Y_t-\overline{Y})^2}} = \frac{(\overline{Y}-\alpha)}{s/\sqrt{n}} = \frac{\widehat{\alpha}-\alpha}{s^2_{\widehat{\alpha}}} \sim t(n-1).$$

г) Детерминацийн коэффициентийг (2.21) томъёогоор бодвол

$$R^2 = 1 - \frac{\mathrm{ESS}}{\mathrm{TSS}} = 1 - \frac{\sum(Y_t-\widehat{\alpha})^2}{\sum(Y_t-\overline{Y})^2} = 1 - \frac{\sum(Y_t-\overline{Y})^2}{\sum(Y_t-\overline{Y})^2} = 1 - 1 = 0.$$

Бодлого 2.6. Сул гишүүнгүй регрессийн загварыг авч үзье

$$Y_t = \beta X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, n.$$

а) β, σ^2–параметрүүдийн ХБК-үнэлэлтийг ол.
б) $\widehat{\beta}$ үнэлэлтийн дисперсийг ол.
в) $\dfrac{\widehat{\beta}-\beta}{s_{\widehat{\beta}}}$ статистик $t(n-1)$ тархалттай болохыг үзүүл.
г) $R^2 = \mathrm{RSS}/\mathrm{TSS}$ томъёогоор олсон R^2–ын утга 1–ээс их, $R^2 = 1 - (\mathrm{ESS}/\mathrm{TSS})$ томъёогоор олсон R^2–ын утга 0–ээс бага байх жишээ гарга.

Бодолт. а) Бодлого, дараах функцийн минимумыг олох асуудалд шилжинэ:

$$F(\beta) = \sum(Y_t - \beta X_t)^2.$$

Экстремумын зайлшгүй нөхцөл ёсоор

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\sum(Y_t-\beta X_t)^2 = 0 \ \text{ буюу } \quad \sum(Y_t-\beta X_t)X_t = 0.$$

Энэ тэгшитгэлийг бодож, β–ийн ХБК-үнэлэлтийг олбол:

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum X_t Y_t}{\sum X_t^2}.$$

Регрессийн үлдэгдлийг олъё:

$$e_t = Y_t - \widehat{\beta}X_t = Y_t - X_t\frac{\sum X_s Y_s}{\sum X_s^2}.$$

Вектор хэлбэрт бичвэл

$$\boldsymbol{e} = \left(\boldsymbol{y} - \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\right)^2 = \boldsymbol{I} - \left(\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}.$$

$\boldsymbol{A}$ нь идемпотент матриц болохыг шалгаж болно:

$$\boldsymbol{A}^2 = \left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\right)^2 = \boldsymbol{I} - 2\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} + \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^2} = \boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}.$$

$$\boldsymbol{Ax} = \left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{xx}'}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\right)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{xx}'\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = 0 \text{ учир } \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}.$$

Иймд, $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{A}(\beta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \beta\boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{A\varepsilon} = \boldsymbol{A\varepsilon}$.

Регрессийн үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэрийн мат. дунджийг бодъё.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(\sum e_t^2\right) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}) = \mathrm{E}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e})) = \mathrm{E}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{ee}')) = \mathrm{E}(\mathrm{tr}((\boldsymbol{A\varepsilon})(\boldsymbol{A\varepsilon})'))\\
&= \mathrm{E}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{A\varepsilon\varepsilon}'\boldsymbol{A}')) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}')\boldsymbol{A}') = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{A}')\\
&= \sigma^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{AA}') = \sigma^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) = \sigma^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})\\
&= \sigma^2\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{I_n} - \frac{\boldsymbol{xx}'}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\right) = \sigma^2\left(tr\boldsymbol{I_n} - \frac{1}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{xx}')\right)\\
&= \sigma^2\left(n - \frac{1}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\mathrm{tr}(\boldsymbol{xx}')\right) = \sigma^2(n-1).
\end{aligned}$$

Эндээс $\widehat{\sigma}^2 = s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum e_t^2$ нь хазайлтгүй үнэлэлт болох нь харагдаж байна.

б) $\widehat{\beta}$ үнэлэлтийн дисперсийг бодъё.

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widehat{\beta}) &= \mathrm{V}\left(\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}'}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\right) = \frac{1}{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^2}\mathrm{V}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^2}\boldsymbol{x}'\mathrm{V}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{x}\\
&= \sigma^2\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^2} = \frac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \frac{\sigma^2}{\sum X_t^2}.
\end{aligned}$$

в) Алдааг хэвийн тархалттай гэе: $\boldsymbol{\varepsilon} \sim \boldsymbol{N}(\boldsymbol{0}, \sigma^2\boldsymbol{I_n})$. $\boldsymbol{A}$ матриц идемпотент болохыг тооцвол:

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum e_t^2 = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{Ae} = \left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma}\right)'\boldsymbol{A}\left(\frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma}\right) \sim \chi^2(\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})).$$

а) хэсэгт $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = n-1$ гэж баталсан тул

$$(n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}\sum e_t^2 \sim \chi^2(n-1).$$

$\widehat{\beta}$ үнэлэлт хэвийн тархалттай:

$$\widehat{\beta} \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{\sum X_t^2}\right) \text{ эсвэл } \widehat{\beta} - \beta \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{\sum X_t^2}\right).$$

Иймд бидний сонирхсон статистик дараах хэлбэртэй болно:

$$\frac{\widehat{\beta} - \beta}{s_{\widehat{\beta}}} = \frac{\widehat{\beta} - \beta}{s/\sqrt{\sum X_t^2}} = \frac{(\widehat{\beta} - \beta)/(\sigma/\sqrt{\sum X_t^2}\ )}{s/\sigma} \sim \frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\chi^2(n-1)}}.$$

Энэ статистик $(n-1)$ чөлөөний зэрэг бүхий Стьюдентийн тархалттай $(t(n-1))$ болохыг батлахын тулд хүртвэр хуваарь хоёрыг хамааралгүй гэж батлах үлдлээ.

Хуваарь нь e_t үлдэгдлээс хамаарсан функц тул $\widehat{\beta}$ үнэлэлт, e_t векторыг хамааралгүй гэж батлахад хангалттай. Үлдэгдлүүдийн вектор хэвийн тархалттай учир $\widehat{\beta}$ ба e_t–г корреляц хамааралгүй гэж баталъя.

$$\widehat{\beta}-\beta=\frac{\boldsymbol{x}'(\beta\boldsymbol{x}+\varepsilon)}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'}=\beta+\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}-\beta=\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(\widehat{\beta}-\beta,\boldsymbol{e})&=\operatorname{Cov}\left(\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}\right)=\operatorname{E}\left(\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\varepsilon'\boldsymbol{A}\right)=\frac{1}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}'\operatorname{V}(\boldsymbol{\varepsilon})\left(\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\right)\\&=\frac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{x}'-\frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\right)=\frac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}')=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

г) Дараах өгөгдлүүдийг авч үзье: $n=2,\ (X_1,Y_1)=(0,2),\ (X_2,Y_2)=(1,1)$. сул гишүүнгүй регрессийн тэгшитгэл $\widehat{Y}=X$ хэлбэртэй тул $\widehat{\beta}=1$ болно. Өөрөөр хэлбэл, регрессийн шулуун 2–р цэг ба координатын эхийг дайрна. $\text{TSS}=0.5,\ \text{ESS}=2^2+0=4,\ \text{RSS}=(0-1.5)^2+(1-1.5)^2=2.5$ тул

$$\frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}=5,\quad \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}}=1-8=-7.$$

Бодлого 2.7. Чебурек зардаг (дотроо мах, ногоо бүхий хуушуууртай төстэй хоол) шинээр байгуулагдсан хоолны газрын менежер бүтээгдэхүүнийхээ зарах үнэнд итгэлтэй биш байсан учраас чебурекийн үнэ болон зарагдсан тоонд 12 долоо хоногийн турш ажиглалт хийжээ.

Ажиглжлтын өгөгдлүүдийг дараах хүснэгтэнд өгөв. Үүнд, t –долоо хоногийн дугаар, q_t –зарагдсан чебурекийн тоо, p_t –нэг чебурекийн үнэ (руб)

t	p_t	q_t	t	p_t	q_t
1	12.3	795	7	12.8	714
2	11.5	915	8	9.9	1180
3	11.0	965	9	12.2	851
4	12.0	892	10	12.5	779
5	13.5	585	11	13.0	625
6	12.5	644	12	10.5	1001

а) $\ln q_t=\alpha+\beta\ln p_t+\varepsilon_t,\quad t=1,2,...,12$ загварын параметрүүдийг үнэл.

б) Олсон үнэлэлтүүдийн тусламжтайгаар, хамгийн их орлого олох чебурекийн үнийн оновчтой утгыг ол.

Бодолт. а) Загварын параметрүүдийн үнэлэлтийг олохдоо эконометрикийн багц программ (*E-views*) ашиглавал дараах үр дүн өгнө.

Хамааран хувьсагч: $\ln(q)$

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	12.027	0.6322	19.0236	0.0000
$\ln(p)$	−2.149	0.2549	−8.4315	0.0000
R^2	0.87668			

б) Борлуулалтын орлого $F(p)$ нь зарагдсан чебурекийн тоог үнээр үржүүлсэнтэй тэнцүү:

$$F(p) = pe^{12.03-2.149\ln p} = e^{12.03}p^{-1.149}.$$

Функцийн хэлбэрээс үзвэл, p–г өсөхөд $F(p)$ функц монотон буурах нь харагдаж байна. Иймд үнэ хичнээн бага байх тутам орлого төчнөөн их байх нь. Гэвч үнийн ажиглалт [9.9, 13.5] интервалд явагдсан учраас энэ интервалаас гарсан p–ийн хувьд бидний гаргалгаа бодитой биш.

Нэгэнт тавигдсан асуултанд хариулах оролдлого хийхийн тулд дараах шугаман загвар авч үзье:

$$q_t = \alpha + \beta p_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, ..., 12.$$

Эконометрикийн багц ашиглан параметрүүдийн үнэлэлтийг олъё.

Хамааран хувьсагч: q

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	2717.70	174.92	15.537	0.0000
p	-157.734	14.555	-10.837	0.0000
R^2	0.9215			

Энэ загвараар олсон борлуулалтын орлогыг тооцвол:

$$F(p) = p(2717.70 - 157.734p) = 2717.70p - 157.734p^2.$$

Үнийн оновчтой утгыг $F'(p) = 0$ нөхцлөөс олбол

$$p_{\text{opt}} = \frac{2717.70}{2 \cdot 157.734} = 8.6.$$

Эндээс үзвэл, эхний загварын адилаар, үнээ бууруулах талаар бодож үзэх нь зүйтэй гэсэн зөвлөмж урган гарч байна.

Бодлого 2.8. Цалингийн өсөлтийн хурд ба ажилгүйдлийн түвшний холбоог дүрслэх Филипсийн муруй дараах тэгшитгэлээр илэрхийлэгдэнэ.

$$\delta\omega_t = \beta_1 + \beta_2\frac{1}{u_t} + \varepsilon_t,$$

Үүнд, ω_t–цалингийн түвшин, $\delta\omega_t = 100(\omega_t - \omega_{t-1})/\omega_{t-1}$–цалингийн өсөлтийн хурд (хувиар), $u_t - t$ дэх оны ажилгүйдлийн хувь. Онолын хувьд $\beta_1 < 0$, $\beta_2 > 0$ гэж үзнэ. Доорхи таблицын өгөгдлийг ашиглан дараах асуултанд хариул:

а) Загварын коэффициентуудын үнэлэлтийг олж, нөлөөтэй эсэхийг тогтоо.

б) Ажилгүйдлийн хэвийн түвшнийг ол. Өөрөөр хэлбэл, $\delta\omega = 0$ байх ажилгүйдлийн түвшнийг ол.

в) Цалингийн өөрчлөлтийн хурданд ажилгүйдлийн түвшин хэзээ хамгийн ихээр (хамгийн багаар) нөлөөлөх вэ?

г) β_1, β_2 параметрүүдийн 95%–ийн итгэх завсрыг байгуул.

t-(он)	ω_t	u_t	t-(он)	ω_t	u_t
1	1.62	1.0	10	2.66	1.8
2	1.65	1.4	11	2.73	1.9
3	1.79	1.1	12	2.80	1.5
4	1.94	1.5	13	2.92	1.4
5	2.03	1.5	14	3.02	1.8
6	2.12	1.2	15	3.13	1.1
7	2.26	1.0	16	3.28	1.5
8	2.44	1.1	17	3.43	1.3
9	2.57	1.3	18	3.58	1.4

Бодолт. а) Эконометрикийн багц, регрессийн параметрүүдийн үнэлэлтийн тухай дараах үр дүнг өгнө:

Хамааран хувьсагч: $\delta\omega$

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	-1.034	2.3716	-0.4362	0.6689
$1/u$	7.896	3.1626	2.4966	0.0247
R^2	0.29355			

$1/u$ хувьсагчийн өмнөх коэффициент статистик нөлөөтэй, харин сул гишүүн 0–ээс мэдэгдэхүйц ялгагдахгүй байна! Гэсэн хэдий ч, ажилгүйдлийн түвшин u–г өсөхөд цалингийн өсөлтийн хурд буурч байгааг тэгшитгэл харуулж байна. Түүнчлэн, хоёр коэффициентийн тэмдэг нь онолын баримтлалтай таарч байна.

б) Ажилгүйдлийн хэвийн түвшнийг олохын тулд $\delta\omega = -1.034 + 7.896\dfrac{1}{u} = 0$ тэгшитгэлийг бодож шийдийг олбол: $u_0 = 7.896/1.034 = 7.63$.

в) Олсон тэгшитгэлээс $\dfrac{\partial\delta\omega}{\partial u} = -7.896\dfrac{1}{u^2}$. Иймд, зөвхөн ажилгүйдлийн түвшин хамгийн бага (хамгийн их) байхад л түүний өөрчлөлт нь цалингийн өөрчлөлтийн хурданд хамгийн ихээр (хамгийн багаар) нөлөөлнө. Өөрөөр хэлбэл, 1–р юм уу 7–р, эсвэл 11–р жилүүдэд харгалзан хамгийн ихээр нөлөөлнө гэсэн үг.

г) Өмнө гарган авсан үр дүнгүүдийг ашиглан итгэх завсруудыг байгуулъя:

$$\beta_1 = -1.034 \pm t_{0.95}(16) \cdot 2.372 = -1.034 \pm 2.12 \cdot 2.372 = -1.03 \pm 5.03,$$
$$\beta_2 = 7.896 \pm t_{0.95}(16) \cdot 3.163 = 7.896 \pm 2.12 \cdot 3.163 = 7.90 \pm 6.70.$$

Бодлого 2.9. Дараах тэгшитгэлүүдийг параметрүүдийн хувьд шугаман хэлбэрт хувиргаж болох уу?

а) $Y_i = \alpha \cdot \exp(\beta X_i) \cdot \varepsilon_i$ б) $Y_i = \alpha \cdot \exp(-\beta X_i) + \varepsilon_i$
в) $Y_i = \exp(\alpha + \beta X_i + \varepsilon_i)$ г) $Y_i = \alpha/(\beta - X_i) + \varepsilon_i$.

Бодлого 2.10. $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$ загварын параметрүүдийг ХБК–ын аргаар үнэлэв. Хэрэв $y_i = Y_i - \overline{Y}$, $x_i = X_i - \overline{X}$, $\widehat{y}_i = \widehat{Y}_i - \overline{Y}$, e_i–регрессийн үлдэгдэл бол дараах илэрхийллүүд тэнцүү болохыг батал.

а) $(\sum x_i y_i)^2/(\sum x_i^2 \sum y_i^2)$, б) $\widehat{\beta}(\sum x_i y_i)/(\sum y_i^2)$,
в) $(\sum \widehat{y}_i y_i)^2/(\sum \widehat{y}_i^2 \sum y_i^2)$, г) $1 - \sum e_i^2 / \sum y_i^2$.

Бодлого 2.11. Хос регрессийн $Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \varepsilon_t,\ t = 1, 2, ..., n,\ \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$ сонгодог загварын хувьд алдааны дисперс σ^2–ын хамгийн үнэний хувь бүхий болон ХБК-үнэлэлтүүд нь $\widehat{\sigma}^2_{\mathrm{ML}} = \sum e_t^2/n,\ \widehat{\sigma}^2_{\mathrm{OLS}} = \sum e_t^2/(n-2)$ бологг.

а) Үнэлэлт тус бүрийн дисперс болон дундаж квадрат хазайлтыг $(\mathrm{MSE}(\widehat{\theta}) = \mathrm{E}((\widehat{\theta} - \theta)^2))$ ол.

б) Энэ хоёр үнэлэлтийн аль нь хамгийн бага дисперс, хамгийн бага дундаж квадрат хазайлттай байх вэ?

Бүлэг 3

Олон хэмжээст регрессийн загвар

Хос регрессийн загварын өргөтгөл болох олон хэмжээст регрессийн загвар (*multiple regression model*) нь:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n$$

эсвэл

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n \tag{3.1}$$

хэлбэртэй байна. Үүнд x_{tp} нь x_p регрессорын t–р ажиглалтын утга,
$x_{t1} = 1$, $t = 1, ..., n$.

3.1 Загварын урьдчилсан нөхцөлүүд

1. $y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n$ –загварын онцлог.

2. $x_{t1}, x_{t2}, ..., x_{kt}$ –санамсаргүй биш хэмжигдэхүүн, үүнд $x_s = (x_{1s}, ..., x_{ts})'$, $s = 1, ..., k$ векторууд R^n огторгуйд шугаман хамааралгүй.

3. $\mathrm{E}\varepsilon_t = 0$, $\mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ – t–ээс үл хамаарна.

4. $t \neq s$ үед $\mathrm{E}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$ –өөр өөр ажиглалтын алдаа хоорондоо статистик хамааралгүй (корреляцгүй).

   Дараах нэмэлт нөхцөлийг байнга авч үзнэ.

5. ε_t, $t = 1, ..., n$ алдаанууд хамтын нормал тархалттай: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Эдгээр таамаглалууд биелэх (3.1) загварыг нормал шугаман регрессийн загвар (*classical normal linear regression model*) гэнэ.

Олон хэмжээст регрессийн урьдчилсан нөхцөлүүдийг матрицан хэлбэрт бичих нь тохиромжтой бөгөөд цаашид энэ хэлбэрээр ашиглана. Иймд дараах тэмдэглэгээг оруулъя.

$\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n)'$ –$n \times 1$ хэмжээст вектор, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_k)'$ –коэффициентуудын $(k \times 1)$ хэмжээст вектор, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)'$ –алдааны $n \times 1$ хэмжээст вектор,

$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix}$ –тайлбарлагч хувьсагчдын $(n \times k)$ хэмжээст матриц. $\boldsymbol{X}$ матрицын баганууд нь $x_s = (x_{1s}, ..., x_{ts})'$, $s = 1, ..., k$ регрессоруудын $n \times 1$ хэмжээст вектор юм. 1–5 нөхцлийг матрицан хэлбэрт бичвэл:

1. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$;
2. $\boldsymbol{X}$ –максимал ранг нь k байх санамсаргүй биш матриц;
3. $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{0}$;
4. $\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$;
5. Нэмэлт нөхцөл: $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n)$, ө.х $\boldsymbol{\varepsilon}$ нь тэг дундажтай, $\sigma^2 \boldsymbol{I}_n$ ковариацийн матриц бүхий нормал тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүн.

3.2 Хамгийн бага квадратын арга, Гаусс-Марковын теорем

$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ –үлдэгдэл векторуудын квадратын нийлбэрийг минималчлагч $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ векторын үнэлэлтийг олох нь хамгийн бага квадратын аргын зорилго билээ:

$$\mathrm{ESS} = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = \sum e_t^2 \to \min\,. \tag{3.2}$$

$\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$ үржвэрийг $\boldsymbol{X}$ ба $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$–аар илэрхийлбэл:

$$\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - 2\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}.$$

Минимумын зайлшгүй нөхцөл ёсоор $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$–аар уламжлал авч тэгтэй тэнцүүлье:

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\partial \widehat{\boldsymbol{\beta}}} = -2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{0}. \tag{3.3}$$

Урьдчилсан нөхцлийн 2 ёсоор $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ матриц урвуутай. Иймд

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}. \tag{3.4}$$

(3.3) нөхцөл нь үлдэгдлүүдийн вектор $\boldsymbol{e}$ бүх үл хамааран хувьсагч $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k$–д ($\boldsymbol{X}$ матрицын багануудад) ортогонал болохыг илэрхийнэ. $\boldsymbol{x}_1'\boldsymbol{e} = ... = \boldsymbol{x}_k'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ нөхцөл $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ нөхцөлтэй эквивалент. Цаашид үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэрийг дараах хэлбэртэй авч үзнэ:

$$\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y}'\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}. \tag{3.5}$$

Геометр тайлбар. $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k$–г n хэмжээст евклид огторгуй R^n–ийн элемент мэтээр үзье. $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k$ векторууд k хэмжээст дэд огторгуй π–г төрүүлнэ. $\widehat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ нь $\boldsymbol{y}$ векторын гипер хавтгай π дээрх ортогонал проекц болно.

Үлдэгдлүүдийн вектор $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}$ нь дэд огторгуй π д ортогонал.Энэ үлдэгдэл векторын урт хамгийн бага байхаар $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$–г олсон нь (3.4) билээ.

Теорем 3.2.1 (Гаусс-Марков)**.** *Хэрэв*

1. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$,
2. $\boldsymbol{X}$ *–максимал ранг нь* k *байх* $(n \times k)$ *хэмжээст санамсаргүй биш матриц,*
3. $E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$, $V(\boldsymbol{\varepsilon}) = E(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$

бол хамгийн бага квадратын аргаар олсон $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ *үнэлэлт нь хазайлтгүй шугаман үнэлэлтүүдийн ангид хамгийн бага дисперстэй байна (Best Linear Unbiased Estimator, BLUE).*

Санамж 3.2.1. Теоремийн нөхцлийг хангасан үнэлэлтийн дисперс

$$\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$$

хэлбэртэй байна.

3.3 ХБК-үнэлэлтийн статистик чанарууд

3.3.1 Алдааны дисперс σ^2–ийн үнэлэлт. s^2–ийн тархалт

Цаашид байнга ашиглах зарим тэмдэглэгээ оруулъя. Прогнозын утгуудын вектор:

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'. \tag{3.6}$$

Регрессийн үлдэгдлүүдийн вектор:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e} &= \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \\ &= [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}']\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Үүнд,

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{N} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'.$$

Дээр тэмдэглэсэн $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ матрицууд нь дараах чанаруудыг хангах бөгөөд эдгээр чанарыг хангах матрицыг идемпотент матриц гэнэ:

$$\boldsymbol{N}^2 = \boldsymbol{N}, \quad \boldsymbol{N}' = \boldsymbol{N}. \tag{3.8}$$

$$\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}. \tag{3.9}$$

Шугаман регрессийн геометр тайлбар ёсоор $\boldsymbol{N}$ нь $\boldsymbol{X}_i$ векторуудаар төрөгдсөн дэд огторгуй π дээр ортогонал проекцлогч операторын матриц болно. Харин $\boldsymbol{M}$ нь π дэд огторгуйн R^n дахь ортогонал гүйцээлт болох $\pi^{\perp}$ хавтгай дээр ортогонал проекцлогч операторын матриц юм. Ийм учраас

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}, \quad \boldsymbol{M}\boldsymbol{X} = \mathbf{0}. \tag{3.10}$$

Үлдэгдлүүдийн вектор $\boldsymbol{e}$–ийн мат.дундаж ба ковариацийн матрицыг олъё.

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\boldsymbol{e}) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{M}\mathrm{E}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} \\ &= (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\mathrm{V}(\boldsymbol{e}) = \mathrm{V}(\boldsymbol{My}) = \boldsymbol{M}\mathrm{V}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}\sigma^2\boldsymbol{I}\boldsymbol{M}' = \sigma^2\boldsymbol{M}. \tag{3.12}$$

Алдааны дисперс σ^2–ын үнэлэлтийг олохдоо үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэр $\sum \boldsymbol{e}_t^2 = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$–ийг ашиглана.

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}) = \mathrm{tr}(\mathrm{V}(\boldsymbol{e})) = \sigma^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}) = \sigma^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{N}) = (n-k)\sigma^2. \tag{3.13}$$

(3.13) томьёог гаргахдаа (3.11), (3.12) үр дүн болон матрицын мөр (trace) гэсэн ойлголтыг ашигласан болно (квадрат матрицын диагоналийн элементүүдийн квадратын нийлбэрийг түүний мөр (trace) гээд $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn} = \sum a_{ii}$ гэж тэмдэглэнэ). Түүнчлэн

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{N}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}') = \mathrm{tr}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) = tr\boldsymbol{I}_k = k. \tag{3.14}$$

(Энд $\mathrm{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{BA})$ чанарыг ашиглав) (3.11)–ээс

$$s^2 = \widehat{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{n-k} = \frac{\sum e_t^2}{n-k}. \tag{3.15}$$

хэмжигдэхүүнийг олбол энэ нь σ^2–ийн хазайлтгүй үнэлэлт болно ($\mathrm{E}s^2 = \sigma^2$). (3.10) ёсоор

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{My} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{M\varepsilon}. \tag{3.16}$$

бөгөөд $\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}) = n - k$. Учир нь идемпотент матрицын мөр нь рангтайгаа тэнцүү. Хэрэв “$r = \mathrm{rank}(\boldsymbol{S})$ бол $\chi^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{S}\boldsymbol{\varepsilon}$ санамсаргүй хэмжигдэхүүн $\chi^2(r)$ тархалттай байна” гэсэн үр дүнг ашиглавал

$$\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\sigma^2} = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}'}{\sigma}\ \boldsymbol{M}\ \frac{\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma} \sim \chi^2(n-k) \ \text{ эсвэл } \ (n-k)\frac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k). \tag{3.17}$$

3.3.2 $\widehat{\beta}$ ба s^2 үнэлэлтүүд хамааралгүй болох нь

Нормал шугаман регрессийн загварт $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ба s^2 үнэлэлтүүдийг хамааралгүй гэж баталж болдог. Үнэн хэрэг дээрээ (3.4)–өөс

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{A\varepsilon}. \tag{3.18}$$

(3.18) ба (3.16)–аас $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ба $\boldsymbol{e}$ нь хамтын нормал тархалттай болох нь харагдана. Иймд $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ба s^2–ыг корреляц хамааралгүй гэж батлахад хангалттай.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AM} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}') \\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

$\mathrm{E}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$ учраас

$$\mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{e}) = \mathrm{E}((\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{e}' = \mathrm{E}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{M}) = \sigma^2\boldsymbol{AM} = \boldsymbol{0}.$$

s^2–ын үнэлэлт $\boldsymbol{e}$–ээс хамаарсан функц тул $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ба s^2 мөн хамааралгүй.

3.4 Хамааран хувьсагчийн вариацийн шинжилгээ. R^2 ба R^2_{adj} коэффициент

Нэг хувьсагчтай регрессийн загварын адилаар $\sum(y_t - \overline{y})^2$ вариацыг регрессийн тэгшитгэлээр тайлбарлагдах, үл тайлбарлагдах гэсэн хоёр нэмэгдэхүүнд тавьж болно:

$$\sum(y_t - \overline{y})^2 = \sum(y_t - \widehat{y}_t)^2 + \sum(\widehat{y}_t - \overline{y})^2 + 2\sum(y_t - \widehat{y}_t)(\widehat{y}_t - \overline{y}). \tag{3.19}$$

Үүнд, y_t ажиглалтын утгууд, $\overline{y}_t$ ажиглалтын утгуудын дундаж, $\widehat{y}_t$ хамгийн бага квадратын аргаар олсон прогнозын утга. Вектор хэлбэрт бичвэл:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}}\imath)'(\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}}\imath) &= (\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}})'(\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}) + (\widehat{\boldsymbol{y}} - \overline{\boldsymbol{y}}\imath)'(\widehat{\boldsymbol{y}} - \overline{\boldsymbol{y}}\imath) \\ &\quad + 2(\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}})'(\widehat{\boldsymbol{y}} - \overline{\boldsymbol{y}}\imath).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Энд $\boldsymbol{\imath} = (1, ..., 1)'$.

$$(\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}})'(\widehat{\boldsymbol{y}} - \overline{\boldsymbol{y}}\imath) = \boldsymbol{e}'(\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\imath}) = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\imath}$$

учраас 3–р нэмэгдэхүүн тэгтэй тэнцүү. Иймд

$$\underset{\text{TSS}}{||\boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\imath}||^2} = \underset{\text{ESS}}{||\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}||^2} + \underset{\text{RSS}}{||\widehat{\boldsymbol{y}} - \overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\imath}||^2}\,. \tag{3.21}$$

(3.21)-ийг $\boldsymbol{y}_* = \boldsymbol{y} - \overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\imath}$, $\widehat{\boldsymbol{y}}_* = \widehat{\boldsymbol{y}} - \overline{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{\imath}$ гэсэн хазайлтаар бичвэл Пифагорын теорем ёсоор

$$\boldsymbol{y}_*'\boldsymbol{y}_* = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} + \widehat{\boldsymbol{y}}_*'\widehat{\boldsymbol{y}}_*. \tag{3.22}$$

Детерминацийн коэффициент R^2–ийг бодвол:

$$R^2 = 1 - \frac{\text{ESS}}{\text{TSS}} = 1 - \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{y}_*'\boldsymbol{y}_*} = \frac{\widehat{\boldsymbol{y}}_*'\widehat{\boldsymbol{y}}_*}{\boldsymbol{y}_*'\boldsymbol{y}_*} = \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}}. \tag{3.23}$$

R^2 коэффициент зөвхөн $\boldsymbol{\imath} = (1, ..., 1)'$ тогтмол нь $\boldsymbol{x}_1, ..., \boldsymbol{x}_k$ векторуудын шугаман хучлаганд харьяалагдаж байх үед утга төгөлдөр байх бөгөөд утга нь $[0; 1]$ завсарт байна. R^2 нь, регрессийн загвар ажиглалтын утгуудад хэр зэрэг дөхөж буй чанарыг илэрхийлнэ.

Хэрэв $R^2 = 0$ бол $\widehat{\boldsymbol{y}}_t = \overline{\boldsymbol{y}}$ болох ба регрессийн хавтгай хэвтээ хавтгай болно. Энэ тохиолдолд регрессээр юуг ч тайлбарлах боломжгүй.

Харин $R^2 = 1$ бол $\widehat{\boldsymbol{y}}_t = \boldsymbol{y}_t$ буюу регрессийн утгууд ажиглалтын утгуудтай яг давхцана. Өөрөөр хэлбэл, бүх ажиглалтын утгууд регрессийн хавтгай дээр оршино. Энэ тохиолдолд регресс бодит байдлыг бүрэн тайлбарлана.

Хэдийгээр R^2 коэффициент нь бодит байдлыг регрессээр тайлбарлах хувийг илэрхийлж байгаа ч зөвхөн R^2 дээр тулгуурлан дүгнэлт гаргах нь учир дутагдалтай. Тухайлбал дараах хоёр санамжийг анхаарах нь зүйтэй.

1. Нэг регрессор нэмж оруулахад R^2 нь ерөнхийдөө өсөх хандлагатай.

2. Хамааран хувьсагчийн хялбар хувиргалтанд ч R^2 өөрчлөгдөнө. Иймд нэгэн ижил хамааран хувьсагчтай регрессүүдэд R^2–ын утганд харьцуулалт хийх нь зөв.

Хэрэв регрессоруудын тоог ажиглалтын тоотой тэнцүү авбал ямагт $R^2 = 1$ гэсэн үр дүнд хүрч болно. Энэ нь $\boldsymbol{y}$ ба регрессоруудын хооронд утга төгөлдөр (эдийн засгийн утга бүхий) хамаарал байгааг үл илэрхийлнэ.

Регрессоруудын тоо өсөхөд R^2 коэффициентийн утга өсдөг чанарыг засах зорилгоор R^2–д засвар хийдэг. Өөрөөр хэлбэл, детерминацийн засварлагдсан (*adjusted*) коэффициент гэж нэрлэгдэх дараах коэффициентийг авч үздэг.

$$R^2_{\text{adj}} = 1 - \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)}{\boldsymbol{y}_*'\boldsymbol{y}_*/(n-1)}. \tag{3.24}$$

R^2_{adj} коэффициентийн чанаруудыг дурдья:

1. $R^2_{\text{adj}} = 1 - (1 - R^2)\frac{(n-1)}{n-k}$.
2. $R^2 \geq R^2_{\text{adj}}, \quad k > 1$.
3. $R^2_{\text{adj}} \leq 1$. ($R_{\text{adj}} < 0$ байж болно)

Регрессоруудын тоо өөрчлөгдсөн нөхцөлд регрессүүдийг харьцуулах зорилгоор детерминацийн засварлагдсан коэффициент R^2_{adj}–ийг хэрэглэх нь илүү тохиромжтой.

Жишээ. Дараах хоёр загварыг авч үзье.

1. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$.
2. $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{X\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon}$.

Хоёр загварын $\boldsymbol{\beta}$ ба $\boldsymbol{\gamma}$ параметрүүдийн ХБК-үнэлэлтийг байгуулна. 1–р загварын хувьд детерминацийн коффициент R^2 нь

$$R_1^2 = 1 - \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\sum(\boldsymbol{y}_t - \overline{\boldsymbol{y}})^2}, \quad \boldsymbol{e} = \boldsymbol{My}, \quad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'. \tag{3.25}$$

2–р загварын детерминацийн коффициентийг бодьё. $\boldsymbol{\delta} = (1, 0, ..., 0)'$ –вектор багана ашиглавал $\boldsymbol{X\delta} = \boldsymbol{x}_1$. Хоёр загварын хувьд $\boldsymbol{M}$ матриц нь адил байна. Учир нь нэгэн ижил бүрэлдхүүн бүхий регрессоруудтай. 2–р загварын үлдэгдэл:

$$\widetilde{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{Mz} = \boldsymbol{M}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\delta}) = \boldsymbol{My} - \boldsymbol{MX\delta} = \boldsymbol{My} = \boldsymbol{e}.$$

Иймд хоёр загварын үлдэгдлүүд давхцаж байна.

$$R_2^2 = 1 - \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\sum(z_t - \overline{z})^2}. \tag{3.26}$$

(3.25) , (3.26)–аас үзвэл R_1^2, R_2^2 коэффициентууд зөвхөн $\boldsymbol{y}_*'\boldsymbol{y}_*$ ба $\boldsymbol{z}_*'\boldsymbol{z}_*$ хуваариудаараа ялгагдаж байна.

$$\boldsymbol{z}_*'\boldsymbol{z}_* = (\boldsymbol{y}_* - \boldsymbol{x}_{1*})'(\boldsymbol{y}_* - \boldsymbol{x}_{1*}) = \boldsymbol{y}_*'\boldsymbol{y}_* - 2\boldsymbol{y}_*'\boldsymbol{x}_{1*} + \boldsymbol{x}_{1*}'\boldsymbol{x}_{1*}. \tag{3.27}$$

Энд $\boldsymbol{y}_* = \boldsymbol{Ay}$, $\boldsymbol{x}_* = \boldsymbol{AX}$, $\boldsymbol{x}_{1*} = \boldsymbol{Ax}_{1*}$ бөгөөд A нь $(n \times n)$ хэмжээст матриц $(\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{\imath\imath}'/n)$. (3.27)–оос үзвэл детерминацийн коэффициентууд үл давхцана. Хоёр регрессийн коэффициентуудын үнэлэлт дараах харьцаагаар холбогдоно:

$$\widehat{\gamma} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\delta}) = \widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\delta}.$$

Хэдийгээр хоёр тэгшитгэлд нэг ижил геометр дүрслэл болон эдийн засгийн утга харгалзах боловч R^2 коэффициентууд үл давхцаж байна. Энэ нь хамаарал өөр өөр координатад томьёологдсонтой холбоотой.

3.4.1 Аль нь "сайн" бэ? $\boldsymbol{y}$ үү? эсвэл $\widehat{\boldsymbol{y}}$ юу?

Хугацааны t агшинд хамааран хувьсагчийн утгын оронд y_t–г эсвэл $\widehat{y}_t$ прогнозыг ашиглаж болно. Загварын нөхцөл ёсоор $\boldsymbol{y}$ векторын ковариацийн матриц $\mathrm{V}(\boldsymbol{y}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}_n$ билээ. Харин прогнозын векторын ковариацийн матриц

$$\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{y}}) = \mathrm{V}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{N}\boldsymbol{N}' = \sigma^2 \boldsymbol{N}.$$

Ийм учраас

$$\mathrm{V}(\boldsymbol{y}) - \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{y}}) = \sigma^2(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}) = \sigma^2 \boldsymbol{M}.$$

$\boldsymbol{M}$ матриц идемпотент учраас зөвхөн 0 эсвэл 1 гэсэн хувийн утгуудтай бөгөөд сөрөг биш тодорхойлогдсон байна:

$$\mathrm{V}(\boldsymbol{y}) - \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{y}}) = \sigma^2 \boldsymbol{M} \geq 0 \quad \text{эсвэл} \quad \mathrm{V}(\boldsymbol{y}) \geq \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{y}}). \tag{3.28}$$

(3.28)–аас, ажиглалтын болон прогнозын дисперсийн хувьд ижилхэн тэнцэл биш биелнэ.

$$\mathrm{V}(\boldsymbol{y}_t) \geq \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{y}}_t). \tag{3.29}$$

Ийнхүү, хамааран хувьсагчийн утгын оронд ажиглалтын бодит утгыг биш загвараар олсон прогнозын утгыг авах нь ямагт илүү байдаг байна. Энэ үед ажиглалтын y_t утгууд мэдээжээр $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ харьцааг хангана гэж үзнэ.

3.5 Статистик таамаглал шалгах. Итгэх завсар, итгэх муж

$\mathbf{H}_0 : \beta_i = \beta_{i0}$ ***таамаглал шалгах.*** Бид дараах статистик үр дүнг баталсан:

1. Үнэлэлтийн вектор $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ нь $\boldsymbol{\beta}$ дундаж, $\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ ковариацийн матриц бүхий хэвийн тархалттай. Өөрөөр хэлбэл

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} - \boldsymbol{\beta} \sim N(0, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}).$$

   Координатчилан бичвэл: $\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS},i} - \beta_i \sim N(0, \sigma^2_{\widehat{\beta}_i})$. Үүнд, $\sigma^2_{\widehat{\beta}_i} = \sigma^2 q^{ii}$, q^{ii} нь $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ матрицын диагоналийн i–р элемент. $\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS},i}$–ийн дисперсийн үнэлэлтээр $s^2_{\widehat{\beta}_i} = \widehat{\sigma}^2_{\widehat{\beta}_i} = \widehat{\sigma}^2 q^{ii} = s^2 q^{ii}$–ийг авна.

2. $(n-k)\dfrac{s^2}{\sigma^2}$ санамсаргүй хэмжигдэхүүн нь $(n-k)$ чөлөөний зэрэг бүхий хи-квадрат тархалттай: $(n-k)\dfrac{s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-k)$.

3. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ ба s^2 үнэлэлтүүд хамааралгүй.

Иймд

$$t = \frac{\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS},i} - \beta_i}{s_{\widehat{\beta}_i}} = \frac{(\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS},i} - \beta_i)/\sigma_{\widehat{\beta}_i}}{s_{\widehat{\beta}_i}/\sigma_{\widehat{\beta}_i}} \sim t(n-k). \tag{3.30}$$

(3.30)–аас үзвэл β_i коэффициентийн 95%-ийн итгэх завсар: $[\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS},i} - t_c \cdot s_{\widehat{\beta}_i};\ \widehat{\beta}_{\mathrm{OLS},i} + t_c \cdot s_{\widehat{\beta}_i}]$ болно. Үүнд t_c нь $(n-k)$ чөлөөний зэрэг бүхий Стьюдентийн тархалтын хоёр талт 95%–ийн квантил.

$\mathbf{H}_0 : \beta_i = \beta_{i0}$ таамаглалыг шалгахдаа (3.30) статистикийг ашиглах ба хэрэв $|t| = \left|\frac{\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS},i} - \beta_{i0}}{s_{\widehat{\beta}_i}}\right| > t_c(n-k)$ бол 5% итгэх түвшиний хувьд $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг няцаана.

$\mathbf{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_k = 0$ ***таамаглал шалгах.*** Сул гишүүнийг регрессийн тоонд оруулсан гэж үзье : $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t$. Тэг таамаглал нь "Бүх регрессоруудын өмнөх коэффициент тэгтэй тэнцүү" гэсэн таамаглал болно. Энэ тохиолдолд

$$\begin{aligned} F &= \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k-1} = \frac{\mathrm{RSS} \cdot (n-k)}{\mathrm{ESS} \cdot (k-1)} \\ &= \frac{\sum (\widehat{y}_t - \overline{y})^2/(k-1)}{\sum e_t^2/(n-k)} \frac{\frac{\widehat{\boldsymbol{y}}'_* \widehat{\boldsymbol{y}}_*}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{k-1}}{\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{n-k}}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

статистикийг авч үзэх ба хүртвэр нь $\frac{1}{k-1} \cdot \chi^2(k-1)$ тархалттай, хуваарь нь $\frac{1}{n-k} \cdot \chi^2(n-k)$ тархалттай гэж баталдаг. Иймд дээрх статистик нь $(k-1)$ ба $(n-k)$ чөлөөний зэргүүд бүхий Фишерийн тархалттай болно:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-k}{k-1} = \frac{\mathrm{RSS} \cdot (n-k)}{\mathrm{ESS} \cdot (k-1)} = \frac{\widehat{\boldsymbol{y}}'_* \widehat{\boldsymbol{y}}_*/(k-1)}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)} \sim F(k-1, n-k). \tag{3.32}$$

$\mathbf{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = ... = \beta_k = 0$ таамаглалыг шалгахдаа, хэрэв $F > F_c$ бол 5% итгэх түвшинд $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг няцаана. Үүнд, F_c нь Фишерийн $F(k-1, n-k)$ тархалтын нэг талт,95%–ийн квантил.

Ерөнхий хэлбэрийн $\mathbf{H}_0 : \boldsymbol{H}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{r}$ ***шугаман зааглал.*** $\boldsymbol{H}$ нь $(q \times k)$ хэмжээст матриц, $\boldsymbol{\beta}$ нь $(k \times 1)$ хэмжээст вектор, $\boldsymbol{r}$ нь $(q \times 1)$ хэмжээст вектор тус тус байг. Заагалын тоо параметрийн тооноос хэтрэхгүй, заагалууд шугаман хамааралгүй (өөрөөр хэлбэл $q \leq k$), мөн $\boldsymbol{H}$ матрицын хамгийн их ранг q ($\mathrm{rank}\boldsymbol{H} = q$) гэж тооцно.

Жишээ. $k = 3$, $q = 2$ байх дараах $\boldsymbol{H}$, r матрицуудыг авч үзье.

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{r}.$$

Энэ нөхцөл нь хоёр шугаман тэгшитгэлийн системтэй эквивалент болно:

$$\begin{cases} \beta_1 = 2 \\ \beta_2 - \beta_3 = 0. \end{cases}$$

Бид $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1})$ болохыг мэдэх билээ. Тэгвэл

$$\boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r} \sim N(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{r}, \sigma^2 \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}'). \tag{3.33}$$

$\mathbf{H}_0 : \boldsymbol{H\beta} = \boldsymbol{r}$ таамаглал үнэн үед

$$\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}')^{-1}(\boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) \sim \chi^2(q). \tag{3.34}$$

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \boldsymbol{e}$ хамааралгүй гэдгээс дараах үр дүн мөрднө.

$$F = \frac{(\boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}')^{-1}(\boldsymbol{H}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})/q}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)} \sim F(q, n-k). \tag{3.35}$$

Хэрэв $\mathbf{H}_0 : \boldsymbol{H\beta} - \boldsymbol{r} = 0$ таамаглал үнэн бол (3.35) статистик хэт их утга авах ёсгүй, харин 95%–ийн магадлалтайгаар $F < F_c(q, n-k)$ биелнэ. Үүнд $F_c(q, n-k)$ нь Фишерийн тархалтын 95%–ийн квантил. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ба $\boldsymbol{e}$ хамааралгүй гэдгийг дахин ашиглаж (3.17), (3.33)–аас:

$$F = \frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}')^{-1}\boldsymbol{H}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})/q}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)} \sim F(q, n-k). \tag{3.36}$$

$F < F_c(q, n-k$ нөхцөл нь $\boldsymbol{\beta}$ коэффициентийн 95%–ийн итгэх мужийг өгнө. (3.36)–ын хүртвэр β_i–ээс хамаарсан, сөрөг биш тодорхойлогдсон квадратлиг хэлбэр учраас энэхүү итгэх муж гүдгэр олонлог байна.

$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I}$ үед (3.36) статистик дараах хэлбэртэй болно.

$$F = \frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})/k}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)} \sim F(q, n-k).$$

Энэ тохиолдолд итгэх муж $\boldsymbol{\beta}$ коэффициентуудын k хэмжээст огторгуйд эллипсоид байна.

$\mathbf{H}_0 : \beta_{k-q+1} = \beta_{k-q+2} = ... = \beta_k = 0$ таамаглал нь $\boldsymbol{H\beta} = \boldsymbol{r}$ гэсэн ерөнхий шугаман таамаглалын тухайн тохиолдол бөгөөд ийм таамаглал шалгах явдал байнга тохиолдоно. Энэ таамаглалын үед (3.36) статистик дараах хэлбэртэй болно.

$$F = \frac{(\boldsymbol{e}^{*\prime}\boldsymbol{e}^{*} - \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e})/q}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)} = \frac{(\mathrm{ESS_R} - \mathrm{ESS_{UR}})/q}{\mathrm{ESS_{UR}}/(n-k)} \sim F(q, n-k). \tag{3.37}$$

Үүнд, $\mathrm{ESS_R}$–“богино” регрессийн (*restricted*) үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэр; $\mathrm{ESS_{UR}}$–“урт” регрессийн (*unrestricted*) үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэр. (3.37) статистикийг богино ба урт регрессийн детерминацийн коэффициентуудаар илэрхийлж болно:

$$F = \frac{(R^2_{\mathrm{UR}} - R^2_{\mathrm{R}})/q}{(1 - R^2_{\mathrm{UR}})/(n-k)} \sim F(q, n-k). \tag{3.38}$$

Санамж 3.5.1. (3.37) хэлбэрийн F статистик нь ерөнхий тохиолдолд, дурын шугаман зааглал $\boldsymbol{H\beta} = \boldsymbol{r}$ ийн хувьд биелнэ. Энэ тохиолдолд урт регресс нь $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн хувьд зааглалгүй регресс, богино регресс нь $\boldsymbol{H\beta} = \boldsymbol{r}$ зааглалтай регресс байна. Энэ үед ХБК арга нь ESS функцийг $\boldsymbol{H\beta} = \boldsymbol{r}$ нөхцөлд минимальчлах бодлого болно.

Чоугийн тест (Chow) $\mathbf{H}_0 : \boldsymbol{\beta}' = \boldsymbol{\beta}''$, $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}''$. Бидэнд өгөгдлүүдийн 2 түүвэр байна гэж үзье. Түүвэр тус бүрээр регрессийн загвар байгуулсан гэе. “Энэ

2 загвар давхцах уу?" гэсэн асуудлыг сонирхъё. Загваруудыг дараах хэлбэртэй гэе.

$$y_t = \beta'_1 x_{t1} + \beta'_2 x_{t2} + ... + \beta'_k x_{tk} + \varepsilon'_t \quad , \quad t = 1, ..., n. \tag{3.39}$$

$$y_t = \beta''_1 x_{t1} + \beta''_2 x_{t2} + ... + \beta''_k x_{tk} + \varepsilon''_t \quad , \quad t = n+1, ..., n+m. \tag{3.40}$$

Тухайлбал y –цалин, x_i –регрессорууд (нас, ажилласан жил, боловсролын түвшин гэх мэт). Эхний түүвэр (n ажиглалттай) эмэгтэйчүүдэд, дараагийн түүвэр (m ажиглалттай) эрэгтэйчүүдэд хамаардаг байг. Тэгвэл "цалингийн тухай энэ загвар эрэгтэйчүүд ба эмэгтэйчүүдэд адил уу?" гэсэн асуулт гарна. Энэ бодлогыг загварын параметрүүд нь шугаман заагалалтай ерөнхий тохиолдолд шилжүүлье. Заагалалгүй регресс нь (3.39) (3.40) регрессийг нэгтгэсэн регресс болно. Өөрөөр хэлбэл, $\mathrm{ESS_{UR}} = \mathrm{ESS_1} + \mathrm{ESS_2}$. Харин чөлөөний зэрэг нь $(n-k)+(m-k) = n+m-2k$. Одоо тэг таамаглал үнэн гэе. Тэгвэл заагалалтай регресс нэг тэгшитгэлээр бичигдэнэ:

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + ... + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n+m. \tag{3.41}$$

(3.41)–ийг үнэлж $\mathrm{ESS_R}$–ийг олно. Загварын параметрүүдэд k тооны заагалал тавьсныг тооцон бичвэл:

$$F = \frac{(\mathrm{ESS_R} - \mathrm{ESS_{UR}})/k}{\mathrm{ESS_{UR}}/(n+m-2k)} \sim F(k, n+m-2k). \tag{3.42}$$

Хэрэв (3.42) статистикийн утга критик утга F_c ээс их гарвал тэг таамаглалыг няцаана. Энэ тохиолдолд 2 түүврийг нэг түүвэр болгон нэгтгэж болно.

Жишээ. Москва хот дахь орон сууцны зах зээл.

ОХУ–ын эдийн засгийн сургуулийн (РЭШ) оюутнуудын 1994–1996 онд цуглуулсан өгөгдлийг боловсруулж дараах загварыг гарган авчээ:

$$\begin{aligned} LOGPRICE =& \beta_0 + \beta_1 LOGLIVSP + \beta_2 LOGPLAN + \beta_3 LOGKITSP \\ &+ \beta_4 LOGDIST + \beta_5 FLOOR + \beta_6 BRICK + \beta_7 BAL \\ &+ \beta_8 LIFT + \beta_9 R1 + \beta_{10} R2 + \beta_{11} R3 + \beta_{12} R4 + \varepsilon. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Үүнд,

$LOGPRICE$ –сууцны үнийн логарифм (ам.доллар),

$LOGLIVSP$ –сууцны талбайн логарифм (кв.метр),

$LOGPLAN$ –ашиглалтгүй (туслах өрөөнүүдийн) талбайн логарифм (кв.метр),

$LOGKITSP$ –гал тогооны өрөөний талбайн логарифм (кв.метр),

$LOGDIST$ –Москва хотын төвөөс алслагдсан зайн логарифм (к.метр), 0 эсвэл 1 утга авах "идэвхгүй" бинар (2 утгат) хувьсагчид:

$FLOOR$ –хэрэв, тухайн сууц 1–р эсвэл хамгийн дээд давхарт бол 1 утга авна,

$BRICK$ –хэрэв, сууц тоосгон барилгад бол 1 утга авна,

BAL –хэрэв, сууц тагттай бол 1 утга авна,

$LIFT$ –хэрэв, барилга цахилгаан шаттай бол 1 утга авна,

$R1$ –1 өрөөтэй сууцны хувьд 1, бусад тохиолдолд 0 утга авна,

$R2$, $R3$, $R4$ –харгалзан 2, 3, 4 өрөөтэй сууцны хувьд өмнөхийн адил. $(*)$ тэгшитгэлийн үнэлэлтийн үр дүнг $n = 464$ ажиглалтаар гаргасан хүснэгтийг доор үзүүлэв (Хүснэгт 3.1). t-статистикийн шинжилгээнээс үзвэл $R1$, $R2$ коэффи-

Хамааран хувьсагч: LOGPRICE

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
$const$	7.106	0.290	24.5	0.0000
$LOGLIVSP$	0.670	0.069	9.65	0.0000
$LOGPLAN$	0.431	0.049	8.71	0.0000
$LOGKITSP$	0.147	0.060	2.45	0.0148
$LOGDIST$	−0.114	0.016	−7.11	0.0000
$BRICK$	0.134	0.024	5.67	0.0000
$FLOOR$	−0.0686	0.021	−3.21	0.0014
BAL	0.114	0.024	4.79	0.0000
$LIFT$	0.042	0.020	2.08	0.0385
$R1$	0.214	0.109	1.957	0.0510
$R2$	0.140	0.080	1.75	0.0809
$R3$	0.164	0.060	2.74	0.0065
$R4$	0.169	0.054	3.11	0.0020
$R^2 = 0.8921$, $R^2_{\text{adj}} = 0.8892$, регрессийн ст.алдаа 0.2013				

Хүснэгт 3.1:

циентуудаас бусад бүх коэффициентууд 5%–ийн итгэх түвшиний хувьд нөлөөтэй байна. $LOGLIVSP$ хувьсагчийн коэффициент 0.67 байгаа нь сууцны талбай 1% нэмэгдэхэд түүний үнэ 0.67%–иар өснө гэсэн үг юм.

$LOGPLAN$, $LOGKITSP$ хувьсагчдын коэффициентийн утгыг тайлбарлахад түвэгтэй. Тэдгээрийг тайлбарлахын тулд дараах жишээг ашиглая. Бусад туслах өрөөний хэмжээ нь харгалзан 11м^2 ба 12м^2 боловч ижилхэн 9м^2 талбайтай гал тогоо бүхий 2 өөр сууц байгаа гэе. Өөрөөр хэлбэл, 2 дахь сууцны туслах өрөөний нийт талбай (21м^2) эхний сууцны туслах өрөөний нийт талбайгаас 5%–иар илүү байна. Тэгвэл манай загвар ёсоор 2 дахь сууцны үнэ эхний сууцтай харьцангуйгаар $5 \cdot 0.431 = 2.15$%–иар өсөх ёстой. Одоо гал тогооны талбай нь 10метр^2, бусад туслах өрөөний талбай нь 11метр^2 байх гурав дахь сууц байгаа гэж төсөөлье. Ингэхлээр, гурав дахь сууцны үнэ эхний сууцтай харьцангуйгаар $5 \cdot 0.431 + 5 \cdot 0.147 = 2.89$%–иар өсөх болж байна. Эндээс үзвэл гал тогооны өрөөг оруулаад туслах өрөөний талбайн хэмжээ нэмэгдэхэд сууцны үнэ, коридорын хэмжээ нэмэгдсэнээс ч ихээр өсөхөд хүрч байна.

$LOGDIST$ хувьсагчийн коэффициент сөрөг (−0.114) байгаа нь хотын төвөөс алслагдах зай 1%–иар өсөхөд сууцны үнэ 0.11%–иар буурч байгааг илтгэнэ. Шинжээчид үзэхдээ, сууцны үнэ үнэн хэрэгдээрээ төвөөс алслагдах хэмжээнээс төдийгүй тухайн сууц оршин байгаа районы "чанараас" хамаарна гэж үздэг ч энэ судалгаанд чанарын үзүүлэлтийг авч үзээгүй болно.

Түүнчлэн шинжээчдийн үзэж байгаагаар сууцны зах зээл 1 өрөөтэй сууцны, 2–4 өрөөтэй сууцны, том сууцны гэсэн гурван секторт хуваагддаг гэнэ. Үүнийг шалгахад (3.35) гэсэн F-статистик ашиглан $\mathbf{H}_0 : \beta_{10} = \beta_{11}; \beta_{11} = \beta_{12}$ таамаглалыг тестлэе. Үр дүнд нь F-статистикийн утга 0.22315, P-утга 0.8001 гарчээ. Энэ нь "2–4 өрөөтэй сууцны үнийн тооцооны томъёо ижил" гэсэн таамаглалыг няцааж чадахгүй болохыг үзүүлнэ. Харин $\mathbf{H}_0 : \beta_9 = \beta_{10}$ таамаглалын хувьд F-статистикийн утга 3.03188, P-утга 0.0823 гарсан учир "1 ба 2 өрөөтэй сууцны хувьд (∗) томъёо ижил" гэсэн таамаглал няцаагдаж байна.

3.6 Бататгах дасгал, бодлого

Бодлого 3.1. Санамсаргүй сонгон авсан 5 өрхийн хувьд дараах хүснэгтэнд үзүүлсэн үр дүн тэмдэглэгджээ (мянган.руб–ээр).

Өрх	Хуримтлал, S	Орлого, Y	Хөрөнгө, W
1	3.0	40	60
2	6.0	55	36
3	5.0	45	36
4	3.5	30	15
5	1.5	30	90

а) S–ийн Y ба W–ээс хамаарсан регрессийг үнэл.

б) Орлого нь 40 мянган.руб, хөрөнгө нь 25 мянган.руб байх гэр бүлийн хуримтлалыг прогнозол (урьдчилан таавярла).

в) Орлого 40 мянган.руб–ээр, харин хөрөнгө нь хэвээр байхад хуримтлал хэрхэн өсөхийг үнэл.

г) Орлого 5 мянган.руб–ээр, харин хөрөнгө нь 15 мянган.руб–ээр нэмэгдвэл хуримтлал хэрхэн өсөхийг үнэл.

д) Регрессийн үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэр ба дисперсийн үнэлэлтийг ол.

Бодолт. $s_t = \beta_1 + \beta_2 y_t + \beta_3 w_t + \varepsilon_t$ регрессийг матрицан хэлбэрт бичвэл $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, үүнд $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{\imath}, \boldsymbol{y}, w]$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$,

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 6.0 \\ 5.0 \\ 3.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 40 & 60 \\ 1 & 55 & 36 \\ 1 & 45 & 36 \\ 1 & 30 & 15 \\ 1 & 30 & 90 \end{bmatrix}.$$

Цаашдын тооцоонд шаардагдах дараах матрицуудыг олъё:

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 5 & 200 & 237 \\ 200 & 8450 & 9150 \\ 237 & 9150 & 14517 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}'\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 19.0 \\ 825.0 \\ 763.5 \end{bmatrix},$$

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 5691.635 & -107.392 & -25.231 \\ -107.392 & 2.399 & 0.241 \\ -25.231 & 0.241 & 0.329 \end{bmatrix}$$

а) (3.4) томъёо ёсоор

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} 0.279 \\ 0.123 \\ -0.029 \end{bmatrix}.$$

б) $\widehat{s} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 y + \widehat{\beta}_3 w = 0.279 + 0.123 \cdot 40 + (-0.029) \cdot 25 = 4.47$.
в) $\Delta s = \widehat{\beta}_2 \Delta y = 10 \cdot 0.123 = 1.23$.
г) $\Delta s = \widehat{\beta}_2 \Delta y + \widehat{\beta}_3 \Delta w = 0.123 \cdot 5 + (-0.029) \cdot 15 = 0.18$.
д) (3.4) ба (3.16) томъёо ёсоор:

$$\sum e_t^2 = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e} = \boldsymbol{s}'\boldsymbol{s} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{S} = 84.5 - 84.219 = 0.281,$$
$$s^2 = \widehat{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{n-k} = \frac{0.281}{5-3} = 0.141.$$

Бодлого 3.2. Өмнөх бодлогын $s_t = \beta_1 + \beta_2 y_t + \beta_3 w_t + \varepsilon_t$ регрессийг авч үзье.
а) Дараах коэффициентуудын 95% итгэх мужыг ол.

1. β_2 ба β_3; 2. β_2; 3. β_3; 4. β_1 ба β_2.

б) Дараах таамаглалуудыг 5% итгэх түвшинд шалга.

1. $\beta_2 = 0$ ба $\beta_3 = 0$;

2. $\beta_3 = 0$ (хөрөнгийн өртөг хуримтлалд нөлөөлөхгүй);

3. $\beta_2 = 0$ (орлогын хэмжээ хуримтлалд нөлөөлөхгүй);

4. $\beta_2 = 1$; 5. $\beta_2 = 1.57$; 6. $\beta_2 = -5\beta_3$.

в) Орлого нь $Y = 30$ мянган.руб, хөрөнгө нь $W = 52.5$ мянган.руб бүхий ямар нэг өрх байг (цаашид 6–р өрх гэх). Энэ өрхийн хувьд:

1. Хуримтлалын прогнозын утгыг ол.

2. Хуримтлалын прогнозын утгын 95%–ийн итгэх завсрыг байгуул.

Бодолт. а) Бодлого 3.1–д гарсан үр дүнгүүдийг энд ашиглах болно.
1): $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_2 \end{bmatrix}$ үед F статистик (3.36)-ийг ашиглана.

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}' = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 2.399 & 0.241 \\ 0.241 & 0.329 \end{bmatrix},$$
$$(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}')^{-1} = \begin{bmatrix} 450.00 & -330.00 \\ -330.00 & 3283.17 \end{bmatrix}.$$

(3.36) ёсоор:

$$\begin{aligned} F &= \frac{(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{H}'(\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{H}')^{-1}\boldsymbol{H}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})/q}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)} \\ &= (450(0.123 - \beta_2)^2 + 2(-330)(0.123 - \beta_2)(-0.029 - \beta_3) \\ &+ 3283.17(-0.029 - \beta_3)^2))/2/(0.281/(5-3)) \\ &= 1600.7(0.123 - \beta_2)^2 + 2347.7(0.123 - \beta_2)(0.029 + \beta_3) \\ &+ 11678.9(0.029 + \beta_3)^2. \end{aligned}$$

Таблицаас $F_{0.95}(2,2) = 19.0$. Иймд (β_2, β_3)–ын 95%–ийн итгэх завсар дараах тэнцэтгэл бишээр тодорхойлогдоно:

$$1600.7(0.123-\beta_2)^2 + 2347.7(0.123-\beta_2)(0.029+\beta_3) + 11678.9(0.029+\beta_3)^2 < 19.0$$

Эсвэл

$$84.25(\beta_2-0.123)^2 - 123.57(\beta_2-0.123)(\beta_3+0.029) + 614.58(\beta_3+0.029)^2 < 1. \quad (*)$$

2),3): (3.30) томъёо ёсоор β_i коэффициентийн 95%–ийн итгэх завсар $[\widehat{\beta}_i - t_c \cdot \widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_i};\ \widehat{\beta}_i + t_c \cdot \widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_i}]$ болно. Үүнд $t_c = 4.303$ нь $n-k = 5-3 = 2$ чөлөөний зэрэг бүхий Стьюдентийн тархалтын хоёр талт 95%–ийн квантил. Иймд

$$\begin{aligned}
\widehat{\beta}_2 - t_c \cdot \widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_2} &= 0.123 - 4.303\sqrt{0.141 \cdot 0.0024} \approx 0.044,\\
\widehat{\beta}_2 + t_c \cdot \widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_2} &= 0.123 + 4.303\sqrt{0.141 \cdot 0.0024} \approx 0.202,\\
\widehat{\beta}_3 - t_c \cdot \widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_3} &= -0.029 - 4.303\sqrt{0.141 \cdot 0.000033} \approx -0.059,\\
\widehat{\beta}_3 + t_c \cdot \widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_3} &= -0.029 + 4.303\sqrt{0.141 \cdot 0.000033} \approx -0.00016.
\end{aligned}$$

Ийнхүү β_2 ба β_3–ын 95%–ийн итгэх завсар:

$$\beta_2 : (0.044; 0.202), \qquad \beta_3 : (-0.059; -0.00016).$$

4): 1)–ийн адилаар, гэхдээ $\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$ үед F-статистик

$$F = \frac{1/q}{\boldsymbol{ee}'/(n-k)}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})' \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_2 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})$$

болохыг анхааран $F < F_{0.95}(2,2)$ тэнцэтгэл бишийг бичээд эмхэтгэвэл:

$$0.21(\beta_1 - 0.279)^2 + 18.95(0.279-\beta_1)(0.123-\beta_2) + 502.27(\beta_2-0.123)^2 < 1.$$

Энэ тэнцэтгэл бишээр тодорхойлогдох муж нь (β_1, β_2)–ын 95%–ийн итгэх завсар болно.

б) Энд а)–д бодсон үр дүнгүүдийг ашиглана.

1) $\beta_2 = \beta_3 = 0$ цэг $(*)$ тэнцэтгэл бишийг хангахгүй:

$$84.25(-0.123)^2 - 123.57(-0.123) \cdot 0.029 + 614.58 \cdot 0.029^2 = 2.23 > 1.$$

Иймд $\mathbf{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ таамаглал няцаагдна.

2) $\beta_3 = 0 \in (-0.059; -0.00016)$ учир няцаагдана.

3) $\beta_2 = 0 \in (0.044; 0.202)$ учир няцаагдана.

4) $\beta_2 = 1 \in (0.044; 0.202)$ учир няцаагдана.

5) $\beta_2 = 1.57 \in (0.044; 0.202)$ учир няцаагдана.

6) $\mathbf{H}_0 : \beta_2 = -5\beta_3$ таамаглал нь $\boldsymbol{c}' = (0,1,5)$, $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{0}$ байх ерөнхий шугаман зааглал бүхий таамаглалын тухайн тохиолдол юм.

t-статистикийг бодъё.

$$t = \frac{\boldsymbol{c}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\theta}}{\sqrt{s^2\boldsymbol{c}'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{c}}} \approx \frac{0.12 + 5(-0.029)}{\sqrt{0.141 \cdot 10^{-3}(2.399 + 2 \cdot 5 \cdot 0.241 + 25 \cdot 0.329)}} \approx -0.60,$$
$$|t| = 0.60 < t_{0.95}(2) = 4.303.$$

Иймээс өгөгдсөн таамаглал няцаагдахгүй.

в) Дээр гарсан үр дүнгүүдийг ашиглана.

1) 6–р өрхийн үл хамааран хувьсагчийн утга $\boldsymbol{x}_6 = (1, 30, 52.5)'$ байна.Иймд

$$\widehat{s}_6 = \boldsymbol{x}_6'\widehat{\boldsymbol{\beta}} = 0.279 + 30 \cdot 0.123 + 52.5(-0.029) \approx 2.45.$$

2) 6–р өрхийн хувьд өмнөх таван өрхийн хувьд бичсэн загвар биелдэг гэж үзье. Өөрөөр хэлбэл $s_6 = \boldsymbol{x}_6'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_6$. Тэгвэл $s_6 - \widehat{s}_6 = \boldsymbol{x}_6'(\boldsymbol{\beta} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}) + \varepsilon_6$. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ба ε_6 хамааралгүй гэдгээс

$$\mathrm{E}(s_6 - \widehat{s}_6)^2 = \sigma^2(1 + \boldsymbol{x}_6'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_6).$$

$\delta = \sqrt{s^2(1 + \boldsymbol{x}_6'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_6)}$ гэж тэмдэглэе. Үүнд, s^2-нь σ^2 дисперсийн үнэлэлт (үүнийг Бодлого 3.1–д бодсон), § 3.5–д үзсэнээр $(s_6 - \widehat{s}_6)/\delta$ нь $n - k = 2$ чөлөөний зэрэг бүхий Стьюдентийн тархалттай. Иймээс s_6–ийн 95%–ийн итгэх завсар $(\widehat{s}_6 - t_{0.95}(2) \cdot \delta,\ \widehat{s}_6 + t_{0.95}(2) \cdot \delta)$ болно. Таблицаас $t_{0.95}(2) = 4.303$. Бодлого 3.1–д гарсан үр дүнгүүдийг ашиглаж итгэх завсрыг олбол: $(0.52; 4.38)$.

Бодлого 3.3. Санхүүгийн хямралын дараа чебурекийн (хуушууртай төстэй хоол) эрэлт унав. Менежер рекламд хөрөнгө зарцуулах хэрэгтэй болжээ. Чебурекийн эрэлт нь үнэ ба рекламд зарцуулсан хөрөнгөөс хамаарах хамаарлыг менежер дараах загвараар авч үзжээ:

$$q_t = \beta_1 + \beta_2 p_t + \beta_3 a_t + \beta_4 a_t^2 + \varepsilon_t.$$

Дараах таблицад 20 долоо хоногийн ажиглалтын утгуудыг үзүүлжээ. Энд t–долоо хоногийн дугаар, q_t–зарагдсан чебурекийн тоо, p_t–нэг чебурекийн үнэ (руб), a_t–рекламд зарцуулсан зардал (100 руб).

t	q_t	p_t	a_t	t	q_t	p_t	a_t
1	525	5.92	4.79	11	407	6.67	5.19
2	567	6.50	3.61	12	608	6.92	3.27
3	396	6.54	5.49	13	399	6.97	4.69
4	729	6.11	2.78	14	631	6.59	3.79
5	265	6.62	5.74	15	545	6.50	4.29
6	615	5.15	1.34	16	512	6.86	2.71
7	370	5.02	5.81	17	845	5.09	2.21
8	789	5.02	3.39	18	571	6.08	3.09
9	513	6.77	3.74	19	539	6.36	4.65
10	661	5.57	3.59	20	620	6.22	1.97

Дараах асуултанд хариулна уу.

а) Чебурекийн эрэлтийн үнээс хамаарах мэдрэмж нь $\beta_2 = \partial q/\partial p$. Үүнтэй адилаар $\partial q/\partial a = \beta_3 + 2\beta_4 a$ бол β_2, β_3, β_4 нь ямар тэмдэгтэй байх вэ?

б) Регрессийн коэффициентуудын үнэлэлт ба тэдгээрийн стандарт алдааг ол.

в) Нэг чебурекийн өөрийн өртөг 2 руб байг. Тэгвэл долоо хоногийн цэвэр ашиг $profit = pq - 2q - 100a$ томъёогоор олдохыг үзүүл.

г) Рекламд 280 руб зарцуулсан нөхцөлд чебурекийн үнийн оновчтой утгыг ол.

д) Чебурекийн үнэ 6 руб байхад рекламны зардлын оновчтой утгыг ол.

е) Оновчтой (цэвэр ашгийг максималчлах) шийдийг ол.

ж) β_2, β_3, β_4 коэффициентуудын 95%–ийн итгэх завсрыг ол. Чебурекийн эрэлтэд үнэ ба рекламны зардал "нөлөөтэй" эсэхийг шалга.

Бодолт. а) Үнэ өсөхөд эрэлт буурна гэсэн утгаар β_2 сөрөг байх учиртай. Рекламны зардал өсөхөд эрэлт өсөөд буурна гэсэн утгаар β_2 эерэг, β_4 сөрөг утгатай байна.

б) Загварын параметрүүдийн үнэлэлтийг эконометрикийн багц программ ашиглан олоход дараах үр дүн гарав:

Хамааран хувьсагч: q

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	957.335	129.218	7.409	0.0000
p	-110.153	21.327	-5.165	0.0001
a	255.529	62.225	4.107	0.0008
a^2	-43.376	8.020	-5.408	0.0001
R^2	0.8778			

Бүх коэффициент 5%–ийн түвшинд нөлөөтэй, тэдгээрийн тэмдэг а)–д дурдсанаар байгаа нь таблицаас харагдаж байна.

в),г) Цэвэр ашгаас p–ээр уламжлал авбал:

$$\frac{\partial(profit)}{\partial p} = \beta_1 + 2p\beta_2 + \beta_3 a + \beta_4 a^2 - 2\beta_2.$$

Үүнийг тэгтэй тэнцүүлж p–ийн оновчтой утгыг олбол:

$$p_{\text{opt}} = \frac{2\beta_2 - \beta_1 - \beta_3 a - \beta_4 a^2}{2\beta_2}.$$

Энэ нь рекламны зардал a бэхлэгдсэн үед чебурекийн үнийн оновчтой утга болно. β_i коэффициентуудын оронд тэдгээрийн үнэлгээ $\widehat{\beta}_i$–г тавьж, $a = 280$ руб гэж орлуулбал оновчтой үнийн үнэлэлт гарна:

$$\widehat{p}_{\text{opt}} = \frac{2(-110.153) - 957.335 - 255.529 \cdot 2.8 - (-43.376)2.8^2}{2(-110.153)} = 7.05 \text{ руб.}$$

д) Өмнөхийн адилаар

$$\frac{\partial(profit)}{\partial a} = p(\beta_3 + 2\beta_4 a) - 2(\beta_3 + 2\beta_4 a) - 100.$$

Үүнийг тэгтэй тэнцүүлж чебурекийн үнэ бэхлэгдсэн үеийн рекламны зардлын оновчтой утгыг олбол:

$$a_{\text{opt}} = \frac{100 + 2\beta_3 - p\beta_3}{2\beta_4(p-2)}.$$

β_i коэффициентуудын оронд тэдгээрийн үнэлгээ $\widehat{\beta}_i$–г тавьж, $p = 6$ руб гэвэл рекламны оновчтой зардлын үнэлэлт гарна:

$$\widehat{a}_{\text{opt}} = \frac{100 + 2 \cdot 255.529 - 6 \cdot 255.529}{2(-43.376)(6-2)} = 266 \text{ руб.}$$

е) Цэвэр ашгийг $profit = h(p, a)$ гэсэн хоёр хувьсагчийн функц гэж үзэж болно. Уламжлалууд авбал:

$$\frac{\partial h}{\partial p} = \beta_1 + 2\beta_2 p + \beta_3 a + \beta_4 a^2 - 2\beta_2,$$

$$\frac{\partial h}{\partial a} = \beta_3 p + 2\beta_4 ap - 2\beta_3 - 4\beta_4 a - 100.$$

Эдгээр уламжлалуудыг тэгтэй тэнцүүлбэл p ба a–ийн хувьд систем үүснэ:

$$\begin{cases} \beta_1 + 2\beta_2 p + \beta_3 a + \beta_4 a^2 - 2\beta_2 = 0 \\ \beta_3 p + 2\beta_4 ap - 2\beta_3 - 4\beta_4 a - 100 = 0. \end{cases}$$

β_i коэффициентуудын оронд тэдгээрийн үнэлгээ $\widehat{\beta}_1 = 957.335$, $\widehat{\beta}_2 = -110.153$, $\widehat{\beta}_3 = 255.529$, $\widehat{\beta}_4 = -43.376$ ийг орлуулж системийг ямар нэгэн аргаар (тухайлбал тооцон бодох аргаар) бодвол

$$\begin{cases} \widehat{a}_1 = 2.72 \\ \widehat{p}_1 = 7.04 \\ \widehat{q}_1 = 556 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \widehat{a}_2 = 8.12 \\ \widehat{p}_2 = 1.78 \\ \widehat{q}_2 = -24.5 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \widehat{a}_3 = -2.00 \\ \widehat{p}_3 = 2.32 \\ \widehat{q}_3 = 17.2 \end{cases}.$$

гэсэн гурван шийд гарна. 2 ба 3–р шийд нь эдийн засгийн утгагүй.

$(\widehat{p}_1, \widehat{a}_1)$ цэг $h(p, a)$ функцийн максимумын цэг болохыг харуулъя. Одоо $h(p, a)$ функцийн 2–р эрэмбийн уламжлалуудыг бодвол:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial p^2} = 2\beta_2, \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial a^2} = 2\beta_4 p - 4\beta_4, \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial p \partial a} = \beta_3 + 2a\beta_4.$$

$(\widehat{p}_1, \widehat{a}_1)$ цэг дээрх 2–р эрэмбийн уламжлалуудын матриц D^2 болон түүний тодорхойлогчийг бодвол:

$$D^2(\widehat{p}_1, \widehat{a}_1) = \begin{bmatrix} -220.31 & 19.83 \\ 19.83 & -437.53 \end{bmatrix}, \qquad detD^2(\widehat{p}_1, \widehat{a}_1) = 95996.$$

Эндээс харахад $D^2(\widehat{p}_1, \widehat{a}_1)$ матриц сөрөг тодорхойлогдсон байна. Иймд $(\widehat{p}_1, \widehat{a}_1)$ цэг $h(p, a)$ функцийн максимумын цэг болно.

Ийнхүү чебурекийн үнэ 7.04 руб, рекламд зарцуулах зардал 272 руб байхад цэвэр ашиг хамгийн их байна.

ж) б)–д гарсан үр дүнгээс харахад бүх коэффициентийн P-утга (*probability*) 0.05–аас бага байна. Иймд бүх коэффициент нөлөөтэй байна.

Загварын чөлөөний зэргийн тоо $n - k = 20 - 4 = 16$. Иймээс β_i коэффициентуудын итгэх завсар: $[\widehat{\beta}_i - t_c \cdot \widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_i}; \widehat{\beta}_i + t_c \cdot \widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_i}]$, $i = 2, 3, 4$. Үүнд $\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_i}$ стандарт алдааны үнэлэлт (*Std.Error*), $t_c = t_{0.95}(16) = 2.12$. Иймд 95%–ийн итгэх завсрууд нь:

$$\beta_2 \in (-155.37;\ -64.94),$$

$$\beta_3 \in (123.62;\ 387.44),$$

$$\beta_4 \in (-60.38;\ -26.37).$$

Бүлэг 4

Олон хэмжээст регрессийн зарим асуудлууд

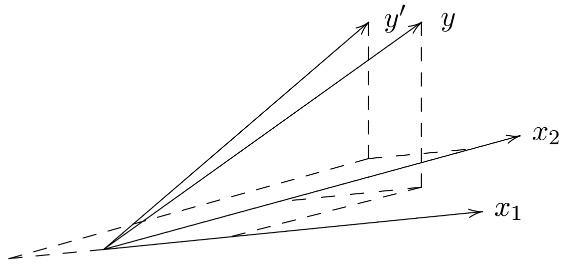
Өмнөх бүлгүүдэд регрессийн загварын онол-статистикийн үндсэн асуудлыг авч үзсэн бол энэ бүлэгт тэдгээрийн практик хэрэглээнд гарч болох зарим асуудлуудыг авч үзнэ. Практикт, гарган авсан регрессийн коэффициентууд нөлөөтэй биш байх, эсвэл загварын илэрхийлэх чадвар сул байх (адекват биш) гэх мэт үзэгдлүүдтэй тулгардаг. Эдгээр үзэгдлийн боломжит шалтгаануудын нэг нь регрессорууд хоорондоо хүчтэй коррелляцтай үед тохиолдох мультиколлинеар шинж юм. Регрессийн загварыг тухайлбал, чанарын шинж тэмдгүүдийн нөлөөг үнэлэх (хүйс, мэргэжил, хүүхэдтэй эсэх гэх мэт) уян хатан хэрэгсэл болгон ашиглаж болдог.

Энэ нь идэвхгүй хувьсагчид гэж нэрлэгдэх шинэ регрессоруудыг оруулж ирснээр хэрэгжих боловч тэдгээрийг зөв хэрэглэх, үнэлэлтийг тайлбарлах зэрэгт онцгой анхаарал тавих шаардлагатай. Ийнхүү энэ бүлэгт мультиколлинеар шинж, идэвхгүй хувьсагч оруулах болон хувьсагч хоорондын тухайн корреляцийн талаар товч авч үзнэ.

4.1 Мультиколлинеар шинж

Сонгодог регрессийн загвар байгуулах үндсэн шаардлагын нэг нь үл хамааран хувьсагчид шугаман хамааралгүй байх явдал билээ. Энэ нь регрессоруудын матриц $\boldsymbol{X}$–ын баганууд шугаман хамааралгүй буюу $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ матриц гүйцэд k рангтай байна гэсэн үг юм. Хэрэв энэ нөхцөл эс биелбэл $\boldsymbol{X}$ матрицын аль нэг багана бусдаараа шугаман илэрхийлэгдэх тул энэ тохиолдлыг бүтэн коллинеар байна гэдэг. Энэ үед $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн үнэлэлтийг ХБК–ын аргаар байгуулах боломжгүй юм. Учир нь, $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ матриц сингуляр байх тул нормал тэгшитгэлийг бодох боломжгүй. Үнэхээр, ийм тохиолдлын жишээг дараах загвараас харж болно.

$C = \beta_1 + \beta_2 S + \beta_3 N + \beta_4 T + \varepsilon$, энд C хэрэглээ, S цалин, N цалингийн бус орлого, T нийт орлого байг. $T = S + N$ тэнцэтгэл биелэх тул дурын h тооны хувьд регрессийг $C = \beta_1 + \beta_2' S + \beta_3' N + \beta_4' T + \varepsilon$ хэлбэртэй бичиж болно. Үүнд, $\beta_2' = \beta_2 + h$, $\beta_3 = \beta_3 + h$, $\beta_4' = \beta_4 - h$. Ийнхүү нэг ижил ажиглалтууд $\boldsymbol{\beta}$ коэффицентийн ялгаатай эвлүүлгээр тайлбарлагдана. Энэ байдал "адил байх" (*identified*) асуудалтай нягт



Зураг 4.1:

холбоотой бөгөөд энэ тухай энд авч үзэхгүй. Үүнээс гадна, $T = S + N$ нөхцлийг тооцвол анхны системийг $C = \beta_1 + (\beta_2 + \beta_4)S + (\beta_3 + \beta_4)N + \varepsilon$ хэлбэрт бичиж болох бөгөөд дөрвөн параметр биш β_1, $(\beta_2 + \beta_4)$ ба $(\beta_3 + \beta_4)$ гэсэн гурван параметрийг үнэлэх боломжтой. Хэрэв бүтэн коллинеар бол $\boldsymbol{X}$ матрицаас шугаман хамааралгүй багануудын максимал системийг олж, бусад багануудыг зайлуулан шинэ регрессийг байгуулж болно.

Практикт $\boldsymbol{X}$ матриц гүйцэд рангтай боловч регрессорууд хоорондоо хүчтэй корреляцтай байх нь элбэг тохиолддог. Өөрөөр хэлбэл, $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ нь бараг бөхсөн матриц байдаг тул мультиколлинеар шинж илэрнэ. Энэ тохиолдолд ХБК-үнэлэлт формаль орших бөгөөд “муу” шинж чанаруудыг агуулдаг. Үүнийг ХБК аргын геометр дүрслэлийг ашиглан төвөггүй тайлбарлаж болно. R^n огторгуйд регрессийг $\boldsymbol{X}$ матрицын багануудаар төрөгдсөн дэд огторгуй дээрх $\boldsymbol{y}$ векторын проекц мэтээр үзэж болно. Хэрэв эдгээр векторуудын хооронд шугаманд ойр хамаарал байвал проекцлох үзэгдэл тогтвортой биш болно. Өөрөөр хэлбэл анхны өгөгдлийн өчүүхэн бага өөрчлөлтөд үнэлэлтийн хэт их өөрчлөлт харгалзахад хүрнэ (Зураг 4.1). $\boldsymbol{x}_1$ ба $\boldsymbol{x}_2$ векторуудын хоорондох өнцөг бага учир $\boldsymbol{y}$ ба $\boldsymbol{y}'$ векторууд хоорондоо багаар ялгагдах боловч эдгээр векторын проекцийн $\boldsymbol{x}_1$ ба $\boldsymbol{x}_2$ вектороор задарсан задаргаа хоорондоо мэдэгдэхүйц ялгагдана. $\boldsymbol{y}$ векторын проекцийн $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$–оор задарсан задаргааны 2 коэффициент хоёул эерэг бөгөөд харьцангүй их биш байхад $\boldsymbol{y}'$ векторын проекцийн задаргааны $\boldsymbol{x}_1$–ийн коэффициент сөрөг, $\boldsymbol{x}_2$–ын коэффициент эерэг, том утгатай байна. Эл байдалтай уялдан регрессийн коэффициентуудыг тайлбарлахад асуудал тулгардаг.

Янз бүрийн шалтгааны улмаас мультиколлинеар шинж илэрнэ. Жишээ нь, хэд хэдэн үл хамааран хувьсагчид нь бага хэлбэлзэл бүхий хугацааны ерөнхий трендтэй байж болно. Тухайн тохиолдолд, нэг үл хамааран хувьсагчийн утга нь нөгөө хувьсагчийн хугацааны хоцролт бүхий утга байж болно.

Ингээд мультиколлинеар байх зарим илэрхий шинжүүдийг дурдъя.

1. Анхны өгөгдлүүдийн бага өөрчлөлт (жишээ нь, шинэ ажиглалт нэмэх) загварын коэффициентуудыг мэдэгдэхүйц ихээр өөрчлөхөд хүргэж байх,

2. Загвар бүхэлдээ илэрхийлэх чадвартай байхад үнэлэлтүүдийн стандарт алдаа их, нөлөө багатай байх,

3. Онолын үүднээс коэффициентуудын үнэлэлт тэмдгийн хувьд алдаатай эсвэл үндэслэлгүй том утгатай байх гэх мэт.

Мультиколлинеар шинж илэрсэн үед судлаач “илүүдэл” хувьсагчдыг зайлуулах хүсэл төрдөг боловч энэ нь шинэ хүндрэл үүсгэх шалтгаан болж болох юм. Нэгдүгээрт, ямар хувьсагчдыг илүүдэл хувьсагч гэж үзэх вэ? гэдэг нь төдийлөн тодорхой биш байдаг. Мультиколлинеар шинж нь $\boldsymbol{X}$ матрицын багана хоорондоо ойролцоогоор шугаман хамааралтай болохыг илэрхийлэхээс биш илүүдэл хувьсагчдыг заахгүй. Хоёрдугаарт, ихэнх тохиолдолд ямар нэгэн үл хамааран хувьсагчийг зайлуулах явдал загварын агуулгад нөлөөлдөг. Түүнчлэн, хамааран хувьсагчийн утганд бодитойгоор нөлөөлж байгаа хувьсагчийг зайлуулах нь ХБК-үнэлэлтийг хаайлттай болгоход хүргэнэ (§ 4.4).

4.2 Идэвхгүй хувьсагч

Регрессийн загварт үл хамааран хувьсагчид өөрчлөлтийнхөө мужид тасралтгүй гэж үздэг (үндэсний орлого, ажилгүйдлийн түвшин, цалингийн хэмжээ гэх мэт). Энэ нь онолын хувьд регрессоруудын төлөв байдалд ямар нэгэн хязгаарлалт хийдэггүй гэсэн үг. Гэтэл ямар нэгэн хувьсагч хоёр эсвэл хэд хэдэн дискрет утга авч болно. Ямар нэг чанарын шинж тэмдгийг илэрүүлэх шаардлагатай үед ийм хувьсагчдыг авч үзэх явдал олонтаа гардаг. Жишээлбэл, цалингийн хэмжээг хэд хэдэн хүчин зүйлээс хамааруулан судлахад ажилтны дээд боловсролтой эсэх нь нөлөөлж байна уу? хэрэв нөлөөлөх бол ямар хэмжээгээр нөлөөлөх вэ? гэсэн асуулт гарна. Мөн эрэгтэй, эмэгтэй хүмүүсийн хөдөлмөрийн хөлсөнд ялгаа байх уу? гэх мэт. Зарчмын хувьд, категор тус бүрт харгалзах тэгшитгэлийг үнэлж, улмаар тэдгээрийн хоорондох ялгааг судалж болох боловч, дискрет хувьсагчид оруулснаар бүх категоруудыг нэг тэгшитгэлээр үнэлж болно.

Үүнийг цалингийн жишээн дээр хийж үзүүлье. Үл хамааран хувьсагчдын $\boldsymbol{x}_t = (x_{t1}, \ldots, x_{tk})'$ вектор өгөгдсөн байг. Өөрөөр хэлбэл, загвар

$$y_t = x_{t1}\beta_1 + \cdots + x_{tk}\beta_k + \varepsilon_t = \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t \qquad t = 1, \ldots, n \tag{4.1}$$

тэгшитгэлүүдээр тодорхойлогсон байг. Үүнд, y_t нь t–р ажилтны цалингийн хэмжээ. Одоо ажилтан дээд боловсролтой эсэхийг илэрхийлэх хүчин зүйл оруулъя. Үүний тулд d гэсэн бинар хувьсагчийг, хэрэв t–р ажиглалтанд тухайн хүн дээд боловсролтой бол $d_t = 1$, эсрэг тохиолдолд $d_t = 0$ байхаар тодорхойлж

$$y_t = x_{t1}\beta_1 + \cdots + x_{tk}\beta_k + d_t\delta + \varepsilon_t = \boldsymbol{z}_t'\boldsymbol{\gamma} + \varepsilon_t \quad t = 1, \ldots, n \tag{4.2}$$

шинэ системийг авч үзье. Үүнд, $\boldsymbol{z}_t = (x_{t1}, \ldots, x_{tk}, d_t)' = (\boldsymbol{x}_t', d_t)'$, $\boldsymbol{\gamma} = (\beta_1, \ldots, \beta_k, \delta)'$. Өөрөөр хэлбэл, ажилчин дээд боловсролтой тохиолдолд дундаж цалин $\boldsymbol{x}_t'\beta + \delta$, үгүй бол $\boldsymbol{x}_t'\beta$ байхыг (4.2) загвар илэрхийлнэ. Иймхүү δ нь бусад параметрүүдийн утга өөрчлөгдөөгүй үед нэг категороос (дээд боловсролгүй) нөгөөд (дээд боловсролтой) шилжихэд цалингийн дундаж өөрчлөлтийг зааж байна. (4.2) системд ХБК аргыг хэрэглэн харгалзах коэффициентуудын үнэлэлтийг гарган авч болно. $\delta = 0$ гэсэн таамаглал шалгах замаар категоруудын хооронд цалингийн их зөрөө байхгүй гэдэгт итгэж болно.

Дээр өгүүлсэн хувьсагчийн төрлийг англи ном, сурах бичигт *dummy variable*, харин орос хэлэнд *фиктивные переменные* гэж нэрлэсэн байдаг. d хувьсагч нь бусад x_j, $j = 1, \dots, k$ регрессоруудтай адил, тэгш эрхтэй хувьсагч бөгөөд түүний “фиктив” чанар нь чанарын шинж тэмдгийг тоон утгаар илэрхийлдэгт оршино.

Чанарын ялгааг илэрхийлэхдээ хоёр утга авах (заавал 0 эсвэл 1 байх албагүй) ямар ч хувьсагчдаар формальчилж болно. Хэдий тийм боловч эконометрикийн хэрэглээнд зөвхөн $d \in \{0, 1\}$ төрлийн идэвхгүй хувьсагчдыг ашиглах тул тайлбар нь илүү энгийн байдаг. Ийм хувьсагчдыг бинар (2 утгат) хувьсагчид гэнэ. Хэрэв, өмнө авч үзсэн жишээнд d хувьсагч дээд боловсролтой ажилтны хувьд 5, дээд боловсролгүй ажилтны хувьд 2 гэсэн утга авдаг гэвэл энэ регрессорын коэффициент цалингийн дундаж өөрчлөлтийн гуравны нэгийг заах болно.

Хэрэв чанарын шинж тэмдэг нь хоёр бус хэд хэдэн утгатай бол мөн тооны утгатай дискрет хувьсагчийг оруулах боломжтой. Гэвч ийм хувьсагчийг бараг ашигладаггүй. Учир нь харгалзах коэффициентод агуулгын хувьд тайлбар хийх нь хэцүү. Ийм үед хэд хэдэн бинар хувьсагчдыг ашиглах нь тохиромжтой.

Жишээлбэл, y_t нь ямар нэг бүтээгдхүүний t сард хэрэглэгдэх хэмжээ бөгөөд түүний хэрэглээ жилийн улирлаас хамаарч өөрчлөгддөг гэе. Улирлын нөлөөг илрүүлэх зорилгоор d_1, d_2 ба d_3 гэсэн гурван бинар хувьсагчийг оруулъя:

- хэрэв t өвлийн сар бол $d_{t1} = 1$, бусад тохиолдолд $d_{t1} = 0$;
- хэрэв t хаврын сар бол $d_{t2} = 1$, бусад тохиолдолд $d_{t2} = 0$;
- хэрэв t зуны сар бол $d_{t3} = 1$, эсрэг тохиолдолд $d_{t3} = 0$.

Дараах тэгшитгэлийг үнэлье.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 d_{t1} + \beta_2 d_{t2} + \beta_3 d_{t3} + \varepsilon_t \tag{4.3}$$

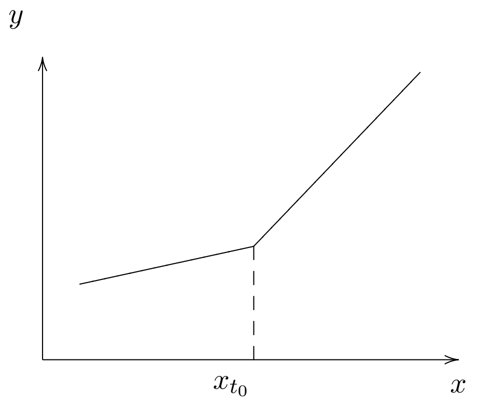
Энд намрын улиралд харгалзах d_4 бинар хувьсагчийг оруулсангүй. Учир нь дурын t сарын хувьд $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 1$ буюу регрессорууд шугаман хамааралтай болоход хүрнэ. Иймд ХБК аргыг хэрэглэх боломжгүй болно. Намрын сарууддад хэрэглээний дундаж хэмжээ β_0, өвлийн саруудад $\beta_0 + \beta_1$, хаврын саруудад $\beta_0 + \beta_2$ харин зуны саруудад $\beta_0 + \beta_3$ байна. Ийнхүү β_i, $i = 1, 2, 3$ коэффициентуудын үнэлэлт намрын саруудтай харьцангуйгаар улирлын дундаж хэрэглээний өөрчлөлтыг үзүүлнэ. Жишээ нь $\beta_3 = 0$ таамаглалыг шалгах нь зуны ба намрын хэрэглээ зөрөө багатай, $\beta_1 = \beta_2$ таамаглал нь өвөл ба хаврын хэрэглээний хэмжээ ижил гэсэн нөхцөлүүдтэй эквивалент юм.

Идэвхгүй хувьсагчид гадна байдлаараа энгийн боловч чанарын шинж тэмдгийн нөлөөг судлахад уян хатан хэрэгсэл болж өгдөг. Өөр нэг жишээ авч үзье. Өмнөх жишээнд жилийн улирал нь сарын дундаж хэрэглээнд хэрхэн нөлөөлөхийг судалсан. Хэрэглээнд зарцуулах орлогыг илэрхийлэх i гэсэн шинэ үл хамааран хувьсагч нэмж оруулан (4.3) загварыг хувиргая. Эхлээд

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 i_t + \varepsilon_t \tag{4.4}$$

регрессийн загварыг байгуулж β_1 коэффициентийг “хэрэглээний налуу” гэж нэрлэе. Тэгвэл жилийн улирал хэрэглээний налууд хэрхэн нөлөөлөх вэ? гэсэн бодлого дэвшүүлж болно. Үүний тулд дараах загварыг авч үзэх хэрэгтэй:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 d_{t1} + \beta_2 d_{t2} + \beta_3 d_{t3} + \beta_4 d_{t1} i_t + \beta_5 d_{t2} i_t + \beta_6 d_{t3} i_t + \beta_7 i_t + \varepsilon_t. \tag{4.5}$$



Зураг 4.2:

Өвөл, хавар, зун ба намрын хэрэглээний налууг харгалзан $\beta_4+\beta_7$, $\beta_5+\beta_7$, $\beta_6+\beta_7$ ба β_7 заана. Өмнөх загварт үзүүлсний адил хэрэглээний налууд улирлын нөлөө байхгүй гэсэн таамаглалыг шалгаж болно.

Бүтцийн өөрчлөлтыг судлахад ашигладаг хэсэг-хэсэг шугаман загварыг байгуулах, үнэлэхэд идэвхгүй хувьсагчдыг хэрэглэж болно. Үүнийг жишээгээр тайлбарлая. Хялбарыг бодож, $\boldsymbol{y}$ нь $\boldsymbol{x}$ ба тогтмол гэсэн хоёр үл хамааран хувьсагчаас хамаардаг гэе. $\boldsymbol{x}$ ба $\boldsymbol{y}$ нь $\{(x_t, y_t),\ t=1,\dots,n\}$ гэсэн хугацааны цуваа хэлбэртэй өгөгдсөн байг (жишээ нь, x_t нь t хугацаан дахь ямар нэг үйлдвэрийн үнсэн фондын хэмжээ, y_t нь энэ хугацаан дахь бүтээгдхүүний хэмжээ). Хэрэв хугацааны t_0 моментод бүтцэд өөрчлөлт гарсан гэж үзвэл шугаман регрессийн загвар t_0 момент хүртлэх өмнөх загвараас өөрчлөгдөх ба ерөнхий шугам тасралтгүй хэвээр үлдэнэ (Зураг 4.2). Ийм загварыг үнэлэхэд $t \le t_0$ үед $r_t=0$, $t>t_0$ бол $r_t=1$ байх r гэсэн бинар хувьсагчийг оруулж, дараах регрессийн тэгшитгэлийг бичье:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 (x_t - x_{t_0}) r_t + \varepsilon_t \tag{4.6}$$

(4.6)–д харгалзах регрессийн шугам $t \le t_0$ үед β_2 налуутай ба $t>t_0$ үед $\beta_2+\beta_3$ налуутай. Мөн x_{t_0} цэг дээр тасралтгүй. Ийнхүү $\beta_3=0$ гэсэн таамаглалаар бүтцийн өөрчлөл явагдаагүй гэдгийг шалгана. Энэ аргыг хугацааны нэг интервалд хэд хэдэн бүтцийн өөрчлөлтэй үед ч өргөтгөн хэрэглэж болно.

Эцэст нь, идэвхгүй хувьсагчийн тусламжтайгаар төрөл бүрийн чанарын шинж тэмдгүүдийн (жишээ нь, боловсролын түвшин, хүүхэдтэй эсэх гэх мэт) нөлөө, мөн тэдгээрийн харилцан нөлөөллийг судалж болно гэдгийг тэмдэглэе. Түүнчлэн хэд хэдэн бинар хувьсагчдыг оруулахдаа регрессоруудын шугаман хамааралгүй байдлыг алдагдуулахгүй байхыг анхаарах хэрэгтэй (өмнөх жишээн дэх улирлын нөлөө).

Дүгнэлт

1. Загварт нөлөөлөх чанарын шинж тэмдгийн нөлөөллийг судлахдаа, тухайн чанар илэрвэл 1, илрэхгүй бол 0 утга авах бинар хувьсагчдыг оруулж болно.

2. Идэвхгүй хувьсагчийг оруулах арга нь чанарын шинж тэмдэг хамааран хувьсагчид нөлөөлөх тухай таамаг мэдээлэл, загвараар шалгаж буй таамаглал зэргээс хамаарна.

3. Идэвхгүй хувьсагчийг оруулах аргаас хамааран уг хувьсагчийн өмнөх коэффициент тайлбарлагдана.

Жишээ. Москва хот дахь сууцны зах зээл. (Үргэлжлэл-1)

Москва хот дахь сууцны үнийг авч үзэж ХБК аргаар үнэлэлтийг байгуулсан болно (Хуудас 39, Хүснэгт 3.1):

$$\begin{aligned} LOGPRICE = {} & \underset{(24.5)}{7.106} + \underset{(9.65)}{0.670}\, LOGLIVSP + \underset{(8.71)}{0.431}\, LOGPLAN \\ & + \underset{(2.45)}{0.147}\, LOGKITSP - \underset{(-7.11)}{0.114}\, LOGDIST \\ & - \underset{(-3.21)}{0.0686}\, FLOOR + \underset{(5.67)}{0.134}\, BRICK \\ & + \underset{(2.08)}{0.042}\, BAL + \underset{(4.79)}{0.114}\, LIFT + \underset{(1.957)}{0.214}\, R1 \\ & + \underset{(1.75)}{0.140}\, R2 + \underset{(2.74)}{0.164}\, R3 + \underset{(3.11)}{0.169}\, R4. \end{aligned} \qquad (*)$$

Загварт байгаа идэвхгүй $FLOOR$, $BRICK$, BAL, $LIFT$, $R1$, $R2$, $R3$, $R4$ хувьсагчдын тайлбарыг авч үзье.

$FLOOR$ хувьсагчийн сөрөг коэффициент нь нэг ба хамгийн дээд давхарын сууцнууд бусад дунд давхрын сууцнуудаас 6.9%–аар хямд гэдгийг харуулна. Тоосгоор барьсан ($BRICK = 1$) сууц хавтангаар барьсан ижил төстэй сууцнаас 13.4%–аар илүү үнэтэй байна. Сууцны үнэ лифттэй ($LIFT = 1$) бол 11.4%, тагттай (BAL=1) бол 4.2%–аар тус тус нэмэгдэнэ.

t-шинжүүрийн BAL хувьсагчийн коэффициентод харгалзах утга хэр тааруу (2.08) байгаа нь сууцны үнэ ба тагтны хоорондын холбоо эргэлзээтэй гэдгийг харуулж байж болох юм.

Өөр, өөр тооны өрөөтэй сууцуудын зах зээлийн бүтцийн ялгааг тооцох зорилгоор регрессийн $R1$, $R2$, $R3$ ба $R4$ хувьсагчдыг оруулсан болно. Өгөгдөлд, тав, зургаа бүр найман өрөөтэй сууцнууд байгаа тул $R1$, $R2$, $R3$ ба $R4$ хувьсагчдын нийлбэр тогтмол биш.

Дээрх жишээнд буйгаар $R2$, $R3$ ба $R4$ хувьсагчдын өмнөх коэффициентуудыг ижил гэж үзэж болно. (∗) тэгшитгэлээс, 2–4 өрөөтэй сууц илүү олон өрөө бүхий сууцнаас үнэтэй, нэг өрөөтэй сууц бүр ч үнэтэй болох нь харагдаж байна.

4.3 Тухайн корреляц

Хамааран хувьсагч ба үл хамаарах хувьсагч нь нэг, нэг байх тохиолдолд тэдгээрийн хоорондын хамаарал (шугаман утгаар) түүврийн корреляцийн коэффициентоор илэрхийлэгдэнэ. Олон хэмжээст регрессийн хувьд хэд хэдэн үл хамааран хувьсагчтай тул энэ ойлголтыг өргөтгөх хэрэгтэй болдог. Судалж буй үл хамаарах хувьсагч ба ямар нэгэн хамааран хувьсагчийн хоорондох корреляцийн коэффициент өндөр гарах нь өмнөхийн адил хамаарлын өндөр зэргийг илэрхийлж болох боловч өөр учир шалтгаантай байж болно. Үнэндээ эхний хоёр хувьсагчдад хүчтэй нөлөө үзүүлдэг гуравдагч хувсагч оршин байгаа нь эцсийн бүлэгтээ уг хувьсагчид корреляцийн өндөр зэрэгтэй гарах шалтгаан болно. Иймээс бусад хүчин зүйлүүдийн нөлөөг (шугаман) зайлуулах замаар хоёр хувьсагчийн хоорондох “цэвэр” корреляц хамаарлыг олох асуудал гарч ирдэг. Үүнийг тухайн корреляцийн коэффициент ашигалан олж болно. Регрессийн хялбар загварыг авч үзье:

$$\boldsymbol{y} = \alpha + \boldsymbol{x}_1\beta_1 + \boldsymbol{x}_2\beta_2 + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Үүнд, $\boldsymbol{y}$ нь ажиглагдсан хамааран хувьсагчийн $n \times 1$ хэмжээст вектор; $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ нь үл хамаарах хувьсагчдын $n \times 1$ хэмжээст векторууд; α, β_1, β_2 нь скаляр хэмжигдхүүн; $\boldsymbol{\varepsilon}$ нь алдааны $n \times 1$ хэмжээст вектор. Бидний зорилго бол $\boldsymbol{x}_2$ регрессорын нөлөөг хассаны дараа $\boldsymbol{y}$ ба эхний $\boldsymbol{x}_1$ регрессорын хоорондох корреляцийг тодорхойлох явдал гэе. Энэ зорилгыг дараах байдлаар хэрэгжүүлнэ.

1. $\boldsymbol{x}_2$ ба тогтмолын тусламжтай $\boldsymbol{y}$–ийн регрессийг байгуулж, $\widehat{\boldsymbol{y}} = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2\boldsymbol{x}_2$ прогнозын утгыг олно.

2. $\boldsymbol{x}_2$ ба тогтмолын тусламжтай $\boldsymbol{x}_1$–ийн регрессийг байгуулж, $\widehat{\boldsymbol{x}}_1 = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2\boldsymbol{x}_2$ прогнозын утгыг олно.

3. $\boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}$ ба $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_1} = \boldsymbol{x}_1 - \widehat{\boldsymbol{x}}_1$ үлдэгдлүүдийг олж, $\boldsymbol{x}_2$ регрессорын нөлөөг зайлуулна.

4. $\boldsymbol{y}$ ба $\boldsymbol{x}_1$ регрессорын хоорондох *тухайн корреляцийн коэффициентийг*, $\boldsymbol{x}_2$ регрессорын нөлөө зайлсан үед, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}$ ба $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_1}$ үлдэгдлийн хоорондох корреляцийн коэффициент мэтээр тодорхойлно ((4.7)).

$$r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2) = r(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_1}) \tag{4.7}$$

ХБК аргын чанар ёсоор $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{y}}$ ба $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{x}_1}$ нь $\boldsymbol{x}_2$ регрессортой корреляц хамааралгүй. Дээрх процедур ийм утгаар $\boldsymbol{x}_2$ хувьсагчийн шугаман нөлөөг зайлуулж байгаа юм.

Тухайн ба ердийн корреляцийн коэффициентууд хоорондоо дараах томъёогоор холбогдоно.

$$r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2) = \frac{r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1) - r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2)r(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)}{\sqrt{1 - r(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)}\sqrt{1 - r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2)}} \tag{4.8}$$

$r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2)$–ын утга ердийн корреляцийн коэффициентийн адил $[-1, 1]$ интервалд байна. Тухайн корреляцийн коэффициент $r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2)$ тэгтэй тэнцүү гарах нь $\boldsymbol{x}_1$ регрессор $\boldsymbol{y}$ векторт шугаман нөлөөлөлгүй гэсэн үг юм.

Тухайн корреляцийн коэффициент $r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2)$ ба детерминацийн коэффициент R^2–ийн хооронд дараах холбоо оршино.

$$r^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2) = \frac{R^2 - r^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2)}{1 - r^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2)} \tag{4.9}$$

буюу

$$1 - R^2 = (1 - r^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2))(1 - r^2(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2)).$$

Өмнө авч үзсэн процедурыг ганц $\boldsymbol{x}_2$ бус, бүлэг $\boldsymbol{X}_2$ хувьсагчдын хувьд нөлөөг зайлуулан (4.7) тодорхойлолтыг өргөтгөж болох бөгөөд энэ үед (4.8) томъёо багагүй хүндэрнэ.

Тухайн ба ердийн корреляцийн коэффициентын ялгааг тайлбарлах үүднээс дараах жишээг авч үзье.

Жишээ. ***Валютын фьючерсийн зах зээл.*** Өрнөдийн ба Оросын валютын фьючерсийн зах зээлийн холбооны тухай асуудлыг сонирхъё. Өнөө үед Оросын хэд хэдэн бирж (МТБ, МЦФБ, РТСБ гэх мэт) АНУ–ын долларыг хугацаатай гэрээгээр нийлүүлэх худалдааг эрхэлж байна. Гэвч, 1992 оны арван нэгдүгээр сараас 1995 оны есдүгээр сарын хооронд нийт худалдааны 75%–85%–ийг Москвагийн Товарын Бирж (МТБ) хийжээ. Иймд АНУ–ын доллар нийлүүлэх фьючерсийн гэрээний үнээр МТБ–ийн гэрээний үнийг авъя.

Барууцд валютын фьючерсийн үнийн өөрчлөлт биржээс нэг их хамаардаггүй. Шинжилгээг хийхдээ, худалдааны хэмжээгээрээ хамгийн их IMM (International Monetary Market, Chicago) биржийг сонгосон болно.

Хөрөнгө оруулагчдын байрлалыг (вариацын марж) өдөр бүр тооцоолохын тулд худалдааны төлбөрт ашигладаг үзүүлэлтүүд болох IMM биржийн хаалтын үнэ, МТБ–ийн ханшны үнэ зэрэг өдөр тутмын үзүүлэлтүүдийг ашиглав.

Харьцуулах параметрээр гэрээний үнийг шууд авалгүй, дараах томъёогоор тодорхойлогдох онд шилжүүлсэн “орлогыг” авсан.

$$y_{t,T} = (\ln F_t^T - \ln S_t)/(T-t) \cdot 365 \qquad (*)$$

Үүнд, F_t^T нь T момент дахь ханшаар нийлүүлэхээр хийсэн, гэрээний t момент дахь үнэ (өөрөөр хэлбэл, $T-t$ хугацаанд нийлүүлэх), харин S_t нь t момент дахь долларын ханш юм. $y_{t,T}^{\mathrm{RU}}$, $y_{t,T}^{\mathrm{DM}}$, $y_{t,T}^{\mathrm{BP}}$, $y_{t,T}^{\mathrm{JY}}$ нь харгалзан 1 доллар нийлүүлэх гэрээнээс олсон орлого, рублээр (RU), германы маркаар (DM), английн фунтээр (BP), японы иенээр (JY) илэрхийлэгдсэн хэмжээ. Бидний бодлоор, энэ үзүүлэлт гэрээний үнийг бодвол инфляцийн түвшнээс бага хэмжээгээр хамаарна. Хугацааны t параметрийг өдрөөр тооцно.

$y_{t,T}^{\mathrm{RU}}$, $y_{t,T}^{\mathrm{DM}}$, $y_{t,T}^{\mathrm{BP}}$, $y_{t,T}^{\mathrm{JY}}$ орлогуудын корреляцийн коэффициентын хүснэгтийг авч үзье.

	RU	DM	BP	JY
RU	1			
DM	0.626	1		
BP	0.380	0.775	1	
JY	0.615	0.919	0.602	1

Хүснэгт 4.1:

Хүснэгт 4.1–оос харахад барууны валютын үзүүлэлтүүдийн корреляцийн коэффициент өндөр (0.602, 0.775, 0.919) байна. Энэ нь барууны санхүүгийн зах зээл нэгдмэл, хамаарал ихтэй байдгийг харуулж байгаа бол рубль ба иений (германы марк) хоорондох корреляц өндөр 0.615 (0.626) байгаа нь анхаарал татаж байна.

Одоо $\mathrm{XX} = \mathrm{RU}, \mathrm{DM}, \mathrm{BP}, \mathrm{JY}$ хувьд $y_{t,T}^{\mathrm{XX}}$ орлогуудын хоорондох тухайн корреляцийн коэффициентийн хүснэгтийг авч үзье (хугацааны трендийн нөлөөг зайлуулсан).

Энэ тохиолдолд илүү бодит дүр зураг харагдаж байна. Европын валютууд $(\mathrm{DM}, \mathrm{BP})$ илүү нягт холбоотой, европын валют ба японы иен сул холбоотой бөгөөд оросын валют барууны валютуудтай бараг холбоо үгүй байна.

	RU	DM	BP	JY
RU	1			
DM	0.024	1		
BP	0.008	0.807	1	
JY	-0.003	0.0.488	0.276	1

Хүснэгт 4.2:

Ийнхүү эхний Хүснэгт 4.1–д буй өндөр коэффициент, жишээлбэл, RU – DM хувьд гарсан 0.626 коэффициент бол ажиглалтын интервалд (1992 оны арваннэгдүгээр сараас 1995 оны есдүгээр сарын хооронд) рублийн доллартай харьцах ханшны уналт ба долларын германы марктай харьцуулсан ханшны уналт илэрснийг харуулж байна. Өөрөөр хэлбэл, энэ корреляц $y_{t,T}^{\mathrm{RU}}$ ба $y_{t,T}^{\mathrm{DM}}$ орлогуудад хугацааны тренд байгааг илэрхийлнэ. Энэ дүгнэлт $y_{t,T}^{\mathrm{RU}}$ ба $y_{t,T}^{\mathrm{DM}}$ нь t–тэй хангалттай өндөр корреляцтай $(-0.673,\ -0.920)$ байгаагаар нотлогдоно.

4.3.1 Хувьсагчдыг дэс дараалан сонгох

Тухайн корреляцийн коэффициент нь *загварын онцлогыг тодорхойлох* (§ 4.4) асуудлыг шийдвэрлэхэд байнга ашиглагдана. Энэ асуудал дээр тогтож ярилцъя.

Зарим тохиолдолд судалаач судалж буй хэмжигдхүүний хамаарлын талаар урьдчилан мэдэж байдаг. Жишээлбэл, өмнөх үр дүнгүүдээс, эдийн засгийн онолын үүднээс, таамаг мэдлэг, мэдээллээс гэх мэт. Түүнчлэн өдийг хүртэл зөвхөн үл мэдэгдэх параметрийг үнэлэх тухай бодлого тавигдаж байлаа. Сонгодог жишээ болгож, Кобб-Дугласын үйлдвэрлэлийн функц $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$–ийн үл мэдэгдэх параметрүүдийг үнэлэх бодлогыг авъя. Үүнд, Y–бүтээгдхүүний тоо хэмжээ, K–капитал, L–хөдөлмөр зарцуулалт. Энэ тэнцэтгэлийг логарифмчилбал, $\ln A$, α, β коэффициентуудын хувьд шугаман тэгшитгэл үүсэх ба улмаар, хамгийн бага квадратын аргаар эдгээр параметрийн үнэлэлтийг олж, ямар нэгэн таамаглал шалгаж болно.

Гэвч, практикт үл хамаарах хувьсагчдын олон тооны ажиглалт хийгдсэн боловч судалж буй үзэгдлийн таамаг загвар байхгүй байх тохиолдол элбэг тааралддаг. Иймд регрессийн загварт ямар хувьсагчдыг хамааруулах вэ? гэсэн асуудал гарч ирнэ. Үүнтэй холбоотой онолын асуудлыг цаашид § 4.4–д авч үзнэ.

Компьютерийн хэрэглээний программуудад *регрессорийг дэс дараалан сонгох* янз бүрийн процедурыг оруулсан байдаг. *Дэс дараалан нэгтгэх, дэс дараалан зайлуулах, дэс дараалан нэгтгэх-зайлуулах процедурууд* нь үнсэн процедурт тооцогдоно. Тухайн корреляцийн коэффициентийн ойлголтыг ашигладаг ийм нэг процедурын тухай товчхон тэмдэглэе.

Дэс дараалан нэгтгэх-зайлуулах процедур

Эхний алхамд тайлбарлагч хувьсагчдын дотроос, хамааран хувьсагч $\boldsymbol{y}$–тэй модулиараа хамгийн их корреляцийн коэффициенттой хувьсагчийг сонгоно.

Хоёрдугаар алхам хоёр дэд алхмаас тогтоно. Эхний дэд алхамд, хэрэв регрессорын тоо хэдий нь хоёроос их болсон бол аль нэг регрессорыг зайлуулах оролдлого хийнэ. Зайлуулсны дараа детерминацын коэффициентийг хамгийн багаар багасгах $\boldsymbol{x}_s$ регрессорыг хайж олно. Дараа нь, энэ регрессор нөлөөтэй биш байх тухай $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг шалгах F-шинжүүрийн ((3.37) үз) утгыг урьдчилан өгөгдсөн ямар нэгэн босго утга $F_{\text{хас}}$–тай жишнэ. Хэрэв $F < F_{\text{хас}}$ бол $\boldsymbol{x}_s$–ийг регрессоруудын жагсаалтаас хасна. Тэмдэглэн хэлэхэд, $\boldsymbol{x}_s$ регрессорын коэффициент тэгтэй тэнцүү байх тухай $\mathbf{H}_0$ таамаглал нь "энэ регрессорыг зайлуулсны дараа ба зайлуулахаас өмнөх детерминацын коэффициентууд хоорондоо тэнцүү" гэсэн таамаглал, мөн "$\boldsymbol{y}$ ба $\boldsymbol{x}_s$–ийн хоорондох тухайн корреляцийн коэффициент 0–тэй тэнцүү" гэсэн таамаглалуудтай эквивалент байна. Хоёр дахь дэд алхамд, өгөгдсөн регрессоруудаас шинэ регрессор сонгож авах оролдлого хийнэ. Тэгшитгэлд өмнө нь оруулсан регрессоруудын нөлөөллийг хассан үед тухайн корреляцийн коэффициент модулиараа хамгийн их байх $\boldsymbol{x}_p$ регрессорыг хайж олно. Ингээд, уг регрессорын коэффициент нөлөөтэй биш байх тухай $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг шалгах F-шинжүүрийн утгыг урьдчилан өгөгдсөн ямар нэгэн босго $F_{\text{нэм}}$–тэй жишнэ. Хэрэв $F > F_{\text{нэм}}$ бол $\boldsymbol{x}_p$ регрессорыг жагсаалтад нэмнэ. Энд, $F_{\text{хас}} < F_{\text{нэм}}$ гэж авах нь зүй ёсны. Хоёрдугаар алхмыг регрессорын жагсаалт үл өөрчлөгдөх хүртэл үргэлжлүүлнэ. Үнэндээ, дэс дараалан сонгох аль ч процедур нь регрессоруудын бүл ямар нэг утгаар оновчтой байхын баталгаа болохгүй.

4.4 Загварын онцлогийг тодорхойлох

Олон хэмжээст сонгодог регрессийн загвартай холбоотой бүхий л асуудал, дүгнэлтүүд нь ил ба далд утгаараа *зөв тодорхойлогдсон загвар* дээр үндэслэгдэж байгаа юм. Өөрөөр хэлбэл, хамааран хувьсагч $\boldsymbol{y}$ ба $\boldsymbol{X}$ регрессорууд, үнэлэгдэж буй $\boldsymbol{\beta}$ параметрүүд § 3.1–ийн

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.10}$$

нөхцлөөр холбогдох бөгөөд § 4.4–ийн 1–3 чанарыг хангана гэж үзэж ирсэн. Энэ үед, (4.10) харьцаа "үнэн загвар"–ыг дүрсэлж байна гэж ярьдаг. Практикт үнэн загвар мэдэгдэхгүй бөгөөд судлаач түүнтэй ойролцоо загварыг л үнэлдэг (энэ тохиолдолд, *загварын онцлогийг тодорхойлох* гэдгийн дор регрессоруудыг сонгохыг ойлгоно). Иймд үнэн загвар ба сонгож авсан загварын параметрүүдийн ХБК-үнэлэлт хоорондын харьцааны асуудал зайлшгүй гарч ирдэг. Тухайлбал, үнэн загварт байгаа зарим хувьсагч сонгон авсан загварт ороогүй (өөрөөр хэлбэл, чухал хувьсагчдыг хассан), эсвэл үнэн загварт байхгүй хувьсагчдыг сонгосон загварт оруулсан (өөрөөр хэлбэл, чухал биш хувьсагчдыг оруулсан) ийм хоёр тохиолдол байж болно.

1–р тохиолдол. (Чухал хувьсагчдыг хассан.)

Үнэн загвар:
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.11}$$
Сонгосон загвар:
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.12}$$

2–р тохиолдол. (Чухал биш хувьсагчдыг нэмж оруулсан.)

Үнэн загвар:
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.13}$$
Сонгосон загвар:
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{Z}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.14}$$

Энд, $\boldsymbol{X}$ нь $n \times k$, $\boldsymbol{Z}$ нь $n \times l$ хэмжээст матрицууд, $\boldsymbol{y}$ нь хамааран хувьсагчийн ажиглалтын $n \times 1$ вектор, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ нь харгалзан $k \times 1$, $l \times 1$ хэмжээст векторууд.

Ихэнхдээ, (4.11) регрессийг “урт”, харин (4.12) регрессийг “богино” регресс гэж нэрлэдэг.

4.4.1 Чухал хувьсагчдыг хассан тохиолдол

(4.12) загварын (богино регресс) $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн ХБК-үнэлэлт

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} \tag{4.15}$$

хэлбэртэй ((3.4)) байдаг билээ.

Урт регресс (4.11)–ийн (үнэн загвар) коэффициентуудын $\boldsymbol{\delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix}$ векторын ХБК-үнэлэлтийг $\widehat{\boldsymbol{\delta}}^* = \begin{bmatrix} \widehat{\boldsymbol{\beta}}^* \\ \widehat{\boldsymbol{\gamma}}^* \end{bmatrix}$ гэж тэмдэглэе. (4.11) тэнцэтгэлийг тооцвол,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathrm{E}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\gamma}, \\ \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

(4.16)–аас, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ үнэлэлт дараах 2 тохиолдлоос бусад үед хазайлттай болох нь мөрднө:

а) $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$ (илэрхий тохиолдол)

б) $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z} = \mathbf{0}$ ($\boldsymbol{X}$ ба $\boldsymbol{Z}$ регрессорууд ортогонал).

Түүнчлэн, $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ гэж баталж болно. Өөрөөр хэлбэл, урт ба богино регресс дэх $\boldsymbol{\beta}$ векторын ХБК-үнэлэлтүүд давхцана (энэ үр дүнг геометрийн үүднээс гурван перпендикулярын тухай теорем ашиглан тайлбарлаж болно).

Регрессийн үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэрийг дараах томъёогоор олно:

$$\mathrm{E}(\mathrm{ESS}) = \sigma^2(n-k) + \boldsymbol{\gamma}'\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\gamma}, \qquad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}')^{-1}\boldsymbol{X}' \tag{4.17}$$

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ба $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ үнэлэлтийн ковариацийн матрицуудыг хооронд нь жишье:

$$\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \tag{4.18}$$

$$\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1} \tag{4.19}$$

$$(\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}))^{-1} - (\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*))^{-1} = \frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X} \geq \mathbf{0}.$$

Энэ нь $\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*) \geq \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ гэдгийг илэрхийлнэ. Өөрөөр хэлбэл, богино загвараар олдсон үнэлэлт ерөнхий тохиолдолд хазайлттай боловч илүү бага дисперстэй байна.

Ойлгомжтой болгох үүднээс $k = l = 1$ байх хялбар тохиолдолдлыг авч үзье.

Урт регресс: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\beta + \boldsymbol{z}\gamma + \boldsymbol{\varepsilon}$ (энд, $\overline{y} = \overline{x} = \overline{z} = 0$ гэе).

Богино регресс: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\beta + \boldsymbol{\varepsilon}$. Үүнд, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{z}$ ба $\boldsymbol{\varepsilon}$ нь $n \times 1$ хэмжээст вектор, харин β, γ скалярууд. Тэгвэл ((2.7) үз)

$$\widehat{\beta} = \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}'(\boldsymbol{x}\beta + \boldsymbol{z}\gamma + \boldsymbol{\varepsilon})}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}} = \beta + \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\gamma + \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\varepsilon}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}, \qquad \mathrm{E}\widehat{\beta} = \beta + \frac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}\gamma.$$

Мөн

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}}, \qquad \mathrm{V}(\widehat{\beta}^*) = \frac{\sigma^2}{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x}(1-r^2)}. \tag{4.20}$$

Үүнд, r нь $\boldsymbol{x}$ ба $\boldsymbol{z}$ векторуудын хоорондох түүврийн корреляцийн коэффициент.

4.4.2 Чухал биш хувьсагчдыг нэмсэн тохиолдол

(4.14) загварын үнэлэлтийн хувьд хоорондоо эквивалент дараах 2 илэрхийллийг гарган авч болно.

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{y} \tag{4.21}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}' \tag{4.22}$$

Эдгээрээс:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}, \qquad \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{Z}}\boldsymbol{X})^{-1} \\
\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \sigma^2((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \\
\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &> \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}
\end{aligned}$$

буюу $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ үнэлэлт хазайлтгүй боловч загварт чухал биш хувьсагчдыг нэмж оруулснаар үнэлэлтийн дисперс ихсэж байна.

Үүнчлэн, $\mathrm{E}\widehat{\sigma}^2 = \sigma^2$ гэж харуулж болно. Иймд ерөнхий тохиолдолд $\widehat{\beta}$, $\widehat{\sigma}^2$ үнэлэлтүүд хазайлтгүй байна.

Чухал биш хувьсагчдыг загварт нэмж оруулснаар үнэлэлтийн хазайлтгүй чанар үл өөрчлөгдөх хэдий ч сайн дөхөлт болгох үүднээс тайлбарлагч олон хувьсагч нэмж оруулах нь буруу юм. Үнэндээ, энэ үед үнэлэлтийн нарийвчлал буурах ба регрессорын тоо нэмэгдсэнээр тэдгээрийн хооронд хүчтэй корреляц үүсэж, улмаар загвар тогтворгүй болдог (§ 4.1–д өгүүлсэн мультиколлинеар шинж). Хялбар тохиолдолд, энэ үндэслэл (4.20) томъёогоор тайлбарлагдана. Үнэхээр r^2 тоо 1–рүү тэмүүлэхэд $\widehat{\beta}^*$ үнэлэлтийн дисперс төгсгөлгүй нэмэгдэнэ.

4.4.3 Богино эсвэл урт регрессийг сонгох

Энэ мөчөөс бүлгийн төгсгөл хүртэл $l = 1$ тохиолдолд ярих болно. Өмнө нь ерөнхий тохиолдолд авч үзсэн билээ.

Практикт илүү ойр бодлогын тавил бол үнэн загвар үл мэдэгдэж байх явдал юм. Дараах 2 загварыг харьцуулж үзье.

I. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{z}\gamma + \boldsymbol{\varepsilon}$ (заагчлалгүй загвар)

II. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ (заагчлалтай загвар)

Үүнд, $\boldsymbol{z}$ нь нэмэлт нэг регрессор бөгөөд $\boldsymbol{X}$ ба $\boldsymbol{z}$ харгалзан $n \times k$, $n \times 1$ хэмжээст матрицууд (Хэрэв I загварт $\gamma = 0$ заагчлалыг нэмбэл II загвар гарах тул "заагчлалгүй" ба "заагчлалтай" гэсэн нэр томъёо ашиглаж байгаа нь ойлгогдоно. Цаашид u (*unrestricted*) ба r (*restrirted*) гэсэн индексийг заагчлалгүй ба заагчлалтай загварт ашиглах болно).

Эдгээр загвараас алийг нь сонгох вэ? гэсэн асуултанд хариулах үүднээс дараах харьцуулалтуудыг авч үзье.

***Арга* 1** (R^2 дээр үндэслэсэн).

Бид $R_u^2 \geq R_r^2$ байдгийг ((3.38)) мэднэ. Учир нь ямагт $\boldsymbol{e}_u'\boldsymbol{e}_u \leq \boldsymbol{e}_r'\boldsymbol{e}_r$ тэнцэл биш биелнэ. Иймд энэ арга муу.

***Арга* 2** (R^2_{adj} дээр үндэслэсэн).

Өмнөх бүлэгт тодорхойлсноор

$$R^2 = 1 - \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_n - \frac{1}{n}\boldsymbol{\imath}\boldsymbol{\imath}', \quad R^2_{\text{adj}} = 1 - \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}/(n-1)}.$$

Заагласлтай болон заагласлгүй загваруудын хувьд

$$R^2_{r,\text{adj}} = 1 - \frac{\boldsymbol{e}_r'\boldsymbol{e}_r/(n-k)}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}/(n-1)}, \quad R^2_{u,\text{adj}} = 1 - \frac{\boldsymbol{e}_u'\boldsymbol{e}_u/(n-k-1)}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}/(n-1)}$$

болно. Өмнө нь бид $\mathbf{H}_0 : \gamma = 0$ таамаглалыг доорхи F-статистик (t-статистик) ашиглан

$$F = \frac{(\boldsymbol{e}_r'\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{e}_u'\boldsymbol{e}_u)}{\boldsymbol{e}_u'\boldsymbol{e}_u/(n-k-1)} \sim F(1, n-k-1) \sim t^2(n-k-1)$$

шалгаж болно гэдгийг харуулсан. Иймд

$$R^2_{r,\text{adj}} - R^2_{r,\text{adj}} = \frac{\boldsymbol{e}_u'\boldsymbol{e}_u/(n-k-1)}{\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}/(n-1)} \cdot \frac{1-t^2}{n-k}.$$

Хэрэв $|t| > 1$ бол $R^2_{r,\text{adj}} < R^2_{u,\text{adj}}$ байх бөгөөд урвуу нь биелнэ. Хэрэв детерминацийн засварлагдсан R^2_{adj} коэффициент зөв шинжүүр болж чадна гэж итгэвэл зөвхөн $|t| > 1$ үед заагласлгүй загварыг сонгон авах ёстой. $t = 1$ нь хязгаарын нөхцөл болно.

Анхны бодлогондоо эргэн оръё. Бидэнд заагласлтай, заагласлгүй гэсэн хоёр загвар байг. Бидний зорилго бол $\boldsymbol{\beta}$–г үнэлэх явдал билээ. Хэрэв заагласлтай загварыг сонговол хазайлттай, харин заагласлгүй загварыг сонговол эрчимтэй биш үнэлэлтэнд хүрнэ.

Арга 3 (хамгийн бага, дундаж квадрат хазайлт MSE(*Mean Squared Error*) дээр дээр үндэслэнэ).

I ба II загварыг $\text{MSE}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \text{E}((\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}))$ шинжүүрээр харьцуулъя. Өмнөхийн адил $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$ гэж тэмдэглэе. Мөн

$$\boldsymbol{q} = \frac{\sigma}{\sqrt{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}}}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{z}, \quad \theta = \frac{\gamma}{\sigma/\sqrt{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{M}\boldsymbol{z}}}$$

тэмдэглэгээг тус тус оруулъя.

Алдааны векторыг олон хэмжээст стандарт нормал тархалттай гэе. Тэгвэл өмнөх (4.15), (4.16), (4.21) ба (4.22) үр дүнгүүдээс

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r \sim N(\boldsymbol{\beta} + \theta\boldsymbol{q}, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}), \quad \widehat{\boldsymbol{\beta}}_u \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} + \boldsymbol{q}\boldsymbol{q}').$$

Эндээс, нормал тархалтын чанарыг ашиглавал

$$\text{MSE}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r) - \text{MSE}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_u) = (\theta^2 - 1)\boldsymbol{q}'\boldsymbol{q}.$$

Бид дахин $|\theta| > 1$ нөхцөл чухал болохыг харлаа. Гэвч энэ удаад θ бол "онолын t-харьцаа" бөгөөд ажиглалтаас олдохгүй.

Энэ үр дүнгээс дараах шүүмжийг хийж болно. Юуны түрүүнд бид $\boldsymbol{\beta}$ коэффициентийн үнэлэлтийг гаргаж авахыг зорьж байгаа билээ. Үүнтэй зэрэгцээд z хувьсагчийг загварт нэмэх шаардлагатай эсэхэд эргэлзэж байгаа энэ үед "$\mathbf{H}_0$:

$\gamma = 0$ таамаглал зөв эсэх" тухай асуулт тавих нь тохиромжгүй юм! Энэ асуултын хариулт γ тэгтэй тэнцэнэ эсвэл үгүй гэдэгт л хариулахаас биш, бидний хүсэж буй "$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r$ ба $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_u$ үнэлэлтүүдийн аль нь илүү вэ?" гэдэгт хариулахгүй. Харин "$\mathbf{H}_0 : |\theta| > 1$" таамаглал дэвшүүлбэл зөв юм. Яагаад гэвэл энэ нөхцөл MSE($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r$), MSE($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_u$) тоонуудын чухам аль нь их болохыг ялгаж өгнө.

Загвар сонгох эсвэл загварын параметрийг үнэлэх асуудлууд үнэндээ ижил юм.

Дээрх тест дээр үндэслэн $\boldsymbol{\beta}$–ийн үнэлэлтийг

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \lambda(\widehat{\theta})\widehat{\boldsymbol{\beta}}_u + (1 - \lambda(\widehat{\theta}))\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r, \qquad \lambda(\widehat{\theta}) = \begin{cases} 0, & |\widehat{\theta}| \le 1 \\ 1, & |\widehat{\theta}| > 1 \end{cases}$$

хэлбэрт бичиж болно. Ийм үнэлэлтийг "хязгаарын" хэмээн нэрлэх бөгөөд $\lambda(\widehat{\theta})$–г дараах хэлбэртэй сайжруулж болно:

$$\lambda(\widehat{\theta}) = \frac{\widehat{\theta}^2}{c^2 + \widehat{\theta}^2}, \quad 0 \le c \le \infty$$

Дүгнэлт:

1. чухал хувьсагчдыг зайлуулснаар богино регрессийн ХБК-үнэлэлт ерөнхий тохиолдолд хазайлттай байх ба урт регрессийг бодвол ковариацийн матриц нь бага;

2. хэрэв $\gamma = 0$ бол хазайлтгүй байна;

3. хэрэв зайлуулсан үл хамаарах хувьсагчид үлдэж буй хувьсагчидтай ортогонал ($\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z} = \mathbf{0}$) байвал урт ба богино регрессийн хувьд олдсон үнэлэлтүүд давхцах боловч регрессийн үлдэгдэл ялгаатай, үнэлэлтийн дисперс ч хазайлттай;

4. богино регрессийн дисперсийн үнэлэлт сөрөг бус хазайлттай байна;

5. чухал биш хувьсагчдыг нэмж оруулахад $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн үнэлэлт хазайлттай байна;

6. богино загварын үнэлэлтийн ковариацийн матриц нь үнэн загварын үнэлэлтийн ковариацийн матрицаас их;

7. үнэлэлтийн дисперс мөн хазайлтгүй байна.

4.5 Бататгах дасгал, бодлого

Бодлого 4.1. Хугацааны t_0 ба t_1 момент бүрт бүтцийн өөрчлөлттэй байх тэгшитгэлийг бинар хувьсагч ашиглан бич ($t_0 < t_1$ гэж үзнэ).

Бодолт. Сонирхож буй загвар x ба тогтмол гэсэн хоёр үл хамааран хувьсагч, мөн y гэсэн хамааран хувьсагчтай байг. x, y хувсагчид хугацааны цуваа хэлбэртэй $\{(x_t, y_t),\ t = 1, \ldots, n\}$ бөгөөд судлаач тодорхой үндэслэлээр хугацааны t_0 ба t_1

моментуудад бүтцийн өөрчлөлт гарсан гэж үзсэн. Энэ тохиолдолд регрессийн тэгшитгэлийг дараах хэлбэрт бичиж болно:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2(x_t - x_{t_0})R_t + \beta_3(x_t - x_{t_0})S_t + \varepsilon_t$$

Үүнд, R, S нь бинар хувьсагчид бөгөөд, хэрэв $t \leq t_0$ бол $R = 0$, $t > t_0$ үед $R = 1$, хэрэв $t \leq t_1$ бол $S = 0$, $t > t_1$ үед $S = 1$ байна.

Дээрх тэгшитгэлд харгалзах регрессийн шугам $t \leq t_0$ үед β_1, $t_0 < t \leq t_1$ үед $\beta_1 + \beta_2$, $t_1 < t$ үед $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$ гэсэн өнцгийн коэффициенттой. Мөн x_{t_0}, x_{t_1} цэгүүд дээрээ тасралтгүй зурагдана.

Хугацааны t_0 моментод бүтцийн өөрчлөлтгүй гэдгийг харуулахад $\mathbf{H}_0 : \beta_2 = 0$ таамаглалыг, t_1 моментод $\mathbf{H}_0 : \beta_3 = 0$ таамаглалыг, хоёр өөрчлөлт хоёул үгүй гэдгийг харуулахын тулд $\boldsymbol{H_0} : \beta_2 = \beta_3 = 0$ таамаглалыг тус тус шалгана.

Бодлого 4.2. n тооны хувь хүмүүсийн дундах хэрэглээний $c_t = \alpha + \beta y_t + \varepsilon_t$ шугаман функцийг үнэлэх асуудал тавигдсан гэе. Ахиу хэрэглэх хандлага тогтмол байх үед хэрэглээний дундаж хэлбийлт өөрчлөгдөж болох эсэх, хэрэв өөрчлөгдөх боломжтой бол энэ функцийн шилжилт хотын хэрэглэгчдээс хөдөөгийн хэрэглэгчдэд ямар байгааг хэрхэн харуулах вэ? Орлогын хэмжээ y^* түвшнөөс их эсвэл бага байхад ахиу хэрэглэх хандлага ялгаатай байна гэсэн таамаглалыг хэрхэн шалгах вэ?

Бодолт. Хэрэв хэрэглээний функц нь шугаман бөгөөд $c_t = \alpha + \beta y_t + \varepsilon_t$ хэлбэртэй бол ахиу хэрэглэх хандлага буюу орлогын хэмжээг нэгжээр нэмэгдүүлэхэд хэрэглээнд гарах өсөлт $\beta = \dfrac{\partial c}{\partial y}$ коэффициентоор тодорхойлогдоно. Хэрэглээний дундаж хэлбийлт нь хэрэглээнд зарцуулагдах орлогын хувь $\dfrac{y}{c}$ бөгөөд β төдийгүй α коэффициентоор тодорхойлогдоно. Иймд ахиу хэрэглэх хандлага β тогтмол байх үед ч, хотын хэрэглэгчдээс хөдөөгийн хэрэглэгчдэд шилжихэд хэрэглээний дундаж хэлбийлт өөрчлөгдөх боломжтой юм. Өөрөөр хэлбэл, α коэффициент өөрчлөгдөнө. Иймээс r гэсэн идэвхгүй хувьсагчийг оруулж болно. Хэрэв t ажиглалт хотын оршин суугчид харгалзах бол $r_t = 0$, эсрэгээг хөдөөгийн оршин суугчид харгалзах бол $r_t = 1$ байх r гэсэн идэвхгүй хувьсагчийг ашиглавал загвар дараах хэлбэртэй болно:

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \gamma r_t + \varepsilon_t.$$

Бодлогонд тавигдсан эхний асуулт $\mathbf{H}_0 : \gamma = 0$ таамаглалаар шалгагдана.

Хэрэв, $y_t \leq y^*$ бол $s_t = 0$, $y_t < y^*$ бол $s_t = 1$ байх s гэсэн идэвхгүй хувьсагчийг оруулж ирье. Хувь хүмүүсийн орлогын хэмжээ y^* түвшнөөс их эсвэл бага байхад ахиу хэрэглэх хандлага ялгаатай байх тухай таамаглалыг шалгахдаа

$$c_t = \alpha + \beta y_t + \gamma(y_t - y^*)s_t + \varepsilon_t$$

загварыг ашиглаж болно. Нотолгоо өгүүлбэрийг $\mathbf{H}_0 : \gamma = 0$ таамаглалаар шалгана. Үнэхээр, энэ загварт ахиу хэрэглэх хандлага орлогын түвшнөөс хамааран, орлогын хэмжээ y^*–оос үл хэтрэх бол β–тай, эсрэг тохиолдолд, $\beta+\gamma$ тоотой тэнцүү байна.

Бодлого 4.3. Дараах регрессийг авч үзье:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 d_t + \varepsilon_t, \qquad t = 1, \ldots, n.$$

Үүнд, d–ямар нэгэн идэвхгүй хувьсагч, $\overline{y}_0$ нь $d = 0$ байх үеийн y хувьсагчийн n_0 ажиглалтын дундаж, харин $\overline{y}_1$ нь $d = 1$ байх үеийн n_1 ажиглалтын дундаж. $\mathrm{V}(\widehat{\beta}_1)$, $\mathrm{V}(\widehat{\beta}_2)$ дисперсүүдийг ол $(n_0 + n_1 = n)$.

Бодолт. Ерөнхий тохиолдолд ажиглалтууд $d_t = 0$, $t = 1, \ldots, n_0$ ба $d_t = 1$, $t = n_0 + 1, \ldots, n_0 + n_1$ гэсэн эрэмбэтэй хэмээн үзэж болно. $\boldsymbol{\beta}$ векторын ХБК-үнэлэлт ёсоор $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$. Үүнд,

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{\imath} \quad \boldsymbol{d}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(хоёрдугаар багана дахь эхний n_0 элементүүд тэгтэй тэнцүү, үлдсэн n_1 элементүүд нэгж байна). Тэгвэл

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} n & n_1 \\ n_1 & n_1 \end{bmatrix}, \qquad (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \frac{1}{n_0 n_1} \begin{bmatrix} n_1 & -n_1 \\ -n_1 & n \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \overline{y}n \\ \overline{y}_1 n_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y}_0 n_0 + \overline{y}_1 n_1 \\ \overline{y}_1 n_1 \end{bmatrix}.$$

Эндээс,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{y}_0 \\ \overline{y}_1 - \overline{y}_0 \end{bmatrix}.$$

Ялгаатай ажиглалтуудын алдаа корреляцгүй гэдгийг ашиглавал $s \neq t$ үед y_s ба y_t мөн корреляцгүй болох тул

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}_1) = \mathrm{V}(\overline{y}_0) = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n_0} \mathrm{V}(y_t)}{n_0^2}.$$

$\mathrm{V}(y_t) = \sigma^2$, $t = 1, \ldots, n$ иймд $\mathrm{V}(\widehat{\beta}_1) = \dfrac{\sigma^2}{n_0}$.

Үүний адилаар, $\mathrm{V}(\overline{y}_1) = \dfrac{\sigma^2}{n_1}$. Алдаанууд корреляцгүй гэдгийг дахин ашиглавал $\mathrm{V}(\widehat{\beta}_2) = \mathrm{V}(\overline{y}_1 - \overline{y}_0) = \mathrm{V}(\overline{y}_1) + \mathrm{V}(\overline{y}_0)$. Ийнхүү эцэст нь

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{n_0}, \qquad \mathrm{V}(\widehat{\beta}_2) = \frac{n\sigma^2}{n_0 n_1}.$$

Бодлого 4.4. 1971–ээс 1976 оны улирлын өгөгдлөөр дараах тэгшитгэлийг хамгийн бага квадратын аргаар гаргаж авчээ:

$$y_t = \underset{(2.14)}{1.12} - \underset{(0.0034)}{0.0098}\, x_{t1} - \underset{(3.42)}{5.62}\, x_{t2} + \underset{(0.009)}{0.044}\, x_{t3}.$$

Хаалтанд стандарт алдааг тэмдэглэсэн ба RSS $= 110.32$, ESS $= 21.43$ гарсан.

а) Коэффициент бүрийн нөлөөтэй эсэхийг шалга.

б) Детерминацийн коэффициентийг ол.

в) Регресс бүхэлдээ итгэлтэй эсэхийг шалга.

г) Тэгшитгэлд жилийн эхний гурван улиралд харгалзах идэвхгүй хувьсагчдыг нэмж оруулахад RSS коэффициент 118.20 болж өссөн. Улирлын нөлөө байгаа тухай таамаглалыг шалгаж, харгалзах регрессийн хэлбэрийг томъёол.

д) Энэ загварыг 1971 оны 1–р улирлаас 1975 оны 1–р улирлын өгөгдөл, 1975 оны 2–р улирлаас 1976 оны 4–р улирлын өгөгдлөөр хоёр салангад регресс болгоход алдаануудын квадратын нийлбэр харгалзан $\text{ESS}_1 = 12.25$, $\text{ESS}_2 = 2.32$ байв. “1975 оны 1 ба 2–р улирлын хооронд бүтцийн өөрчлөлт гарсан” гэсэн таамаглалыг шалга.

Бодолт. а) Энд $n = 24$, (нийт 6 жил) $k = 4$ байна. Коэффициентууд нөлөөтэй байх тухай $\mathbf{H}_0 : \beta_i = 0,\ i = 1, 2, 3, 4$ таамаглалыг (5%–ийн түвшинтэй) шалгая. t-статистикийг $t_i = \widehat{\beta}_i / \widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_i}$ харьцаагаар тооцох бөгөөд $t_{0.95}(20) = 2.086$ утгатай харьцуулж үзнэ:

$$\begin{aligned}
|t_1| &= \frac{1.12}{2.14} = 0.523 < 2.086\\
|t_2| &= \frac{0.0098}{0.0034} = 2.882 > 2.086\\
|t_3| &= \frac{5.62}{3.42} = 1.643 < 2.086\\
|t_4| &= \frac{0.044}{0.009} = 4.889 > 2.086.
\end{aligned}$$

Иймээс 5%–ийн түвшинд нэг ба гуравдугаар коэффициентууд статистикийн хувьд нөлөөтэй бус, хоёр ба дөрөв нь нөлөөтэй байна.

б) Детерминацийн коэффициент:

$$R^2 = \frac{\text{RSS}}{\text{TSS}} = \frac{\text{RSS}}{\text{ESS} + \text{RSS}} = \frac{110.32}{131.75} = 0.837.$$

в) $\mathbf{H}_0 : \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$ таамаглалыг шалгая. (3.32) статистикийг ашиглавал

$$\begin{aligned}
F &= \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n-k}{k-1} = \frac{\text{RSS}}{\text{ESS}} \cdot \frac{n-k}{k-1} =\\
&= \frac{110.32}{21.43} \cdot \frac{20}{3} = 34.319 > 3.098 = F_{0.95}(3, 20).
\end{aligned}$$

Иймд, регресс бүхэлдээ 5%–ийн түвшинд итгэлтэй байна.

г) Бодлогын нөхцөлд өгүүлснээр тэгшитгэлд гурван идэвхгүй хувьсагч нэмэгдсэн байгаа. y хувьсагчийн дундаж утга улирлын хэлбэлзэлтэй байх боломжтой, харин ахиу үзүүлэлтүүд өөрчлөгдөхгүй гэе. Тэгвэл дараах регрессийг авч үзэхэд хүрнэ:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \beta_3 x_{t2} + \beta_4 x_{t3} + \beta_5 d_{t1} + \beta_6 d_{t2} + \beta_7 d_{t3} + \varepsilon_t.$$

Энэ тэгшитгэлийн хувьд $\mathbf{H}_0 : \beta_5 = \beta_6 = \beta_7 = 0$ (улирлын нөлөө байхгүй) таамаглалыг шалгаж үзье. (3.37) статистикийг ашиглана:

$$F = \frac{(\mathrm{ESS_R} - \mathrm{ESS_{UR}})/q}{(\mathrm{ESS_{UR}})/(n-k)}.$$

Энд, $q = 3$, $k = 7$, $n - k = 17$, ба $\mathrm{RSS_{UR}} = 118.20$, $\mathrm{RSS_R} = 110.32$ байна. $\mathrm{TSS_{UR}} = \mathrm{TSS_R} = \mathrm{TSS}$ тул

$$\begin{aligned} \mathrm{ESS_R} - \mathrm{ESS_{UR}} &= \mathrm{RSS_{UR}} - \mathrm{RSS_R} = 118.20 - 110.32 = 7.88, \\ \mathrm{ESS_{UR}} &= \mathrm{TSS} - \mathrm{RSS_{UR}} = 131.75 - 118.20 = 13.55, \\ F &= \frac{7.88/3}{13.55/17} = 3.295 > 3.197 = F_{0.95}(3, 17). \end{aligned}$$

Улирлын нөлөө байхгүй гэсэн таамаглал 5%–ийн итгэх түвшинд няцаагдаж байна.

д) 1975 оны нэг ба хоёрдугаар улирлын хооронд бүтцийн өөрчлөлт байхгүй гэсэн таамаглалыг шалгахдаа Чоугийн тестийг ашиглая ((3.42)–ийг үз)

$$F = \frac{(\mathrm{ESS_R} - \mathrm{ESS_{UR}})/k}{\mathrm{ESS_{UR}}/(n+m-2k)}.$$

$\mathrm{ESS_R} = 21.43$, $\mathrm{ESS_{UR}} = \mathrm{ESS_1} + \mathrm{ESS_2} = 12.25 + 2.32 = 14.57$, $n + m = 24$, $k = 4$ тул

$$F = \frac{(21.43 - 14.57)/4}{14.57/16} = 1.883 < 3.007 = F_{0.95}(4, 16).$$

Эндээс, 5%–ийн итгэх түвшинд бүтцийн өөрчлөлт байхгүй гэсэн таамаглал үл няцаагдана.

Бодлого 4.5. Үнэн загвар

$$\begin{aligned} & y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t, \\ & \mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2, \quad \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \quad t \neq s, \quad t = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

харьцаануудаар өгөгдсөн байг. $\boldsymbol{y}$–ийн $\boldsymbol{x}_1$ дээрх регрессийг байгуулахад σ^2 дисперс уг регрессийн үлдэгдлийн тусламжтай стандарт байдлаар үнэлэгдэнэ. Энэ үнэлэлт хазайлттай (дээрээсээ) гэдгийг харуул.

Бодолт. $\boldsymbol{y}$–ийн $\boldsymbol{x}_1$ дээрх регресс $y_t = \beta_1 x_{t1} + u_t$ гэж бичигдэх ба β_1 параметрийн стандарт үнэлэлт

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1' \boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}_1' \boldsymbol{x}_1}.$$

Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл биш ба (4.17) томъёог хэрэглэвэл

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2) &= \sigma^2 + \frac{1}{n-1} \beta_2^2 \boldsymbol{x}_2' \left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_1'}{\boldsymbol{x}_1' \boldsymbol{x}_1} \right) \boldsymbol{x}_2 \\ &= \sigma^2 + \frac{1}{n-1} \beta_2^2 \frac{(\boldsymbol{x}_1' \boldsymbol{x}_1)(\boldsymbol{x}_2' \boldsymbol{x}_2) - (\boldsymbol{x}_1' \boldsymbol{x}_2)^2}{\boldsymbol{x}_1' \boldsymbol{x}_1} \geq \sigma^2. \end{aligned}$$

Бодлого 4.6. Жил тутмын өгөгдлүүд дараах харьцааг (үнэн загвар) хангах ба сонгодог загварын бүх нөхцөл биелж байг

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + \beta_2 t + \varepsilon_t.$$

Гэвч хугацааны тренд агуулаагүй "буруу"

$$y_t = \alpha + \beta_1 x_t + u_t$$

загвар үнэлэгджээ.

а) Хугацааны тренд агуулаагүй загварын хувьд сонгодог регрессийн нөхцөлүүдээс ямар нь үл биелэх вэ?

б) Энэ загварын хувьд үлдэгдлүүдийн нийлбэр тэгтэй тэнцэх үү? $\mathrm{E}(u_t) = 0$ гэсэн буруу төсөөлөлтэй яаж холбогдох вэ?

Бодолт. а) Сонгодог регрессийн нөхцөлүүд биелэх эсэхийг шалгая. $y_t = \alpha + \beta_1 x_t + u_t$, $t = 1, \dots, n$ загварын u_t алдааны чанаруудыг тайлбарлая.

1. $\mathrm{E}(u_t) = \mathrm{E}(y_t - (\alpha + \beta_1 x_t)) = \mathrm{E}(\beta_2 t + \varepsilon_t) = \beta_2 t \neq 0$ буюу алдааны математик дундаж тэгтэй тэнцүү байх тухай нөхцөл биелэхгүй.

2. $\mathrm{V}(u_t) = \mathrm{V}(y_t - (\alpha + \beta_1 x_t)) = \mathrm{V}(\beta_2 t + \varepsilon_t) = \mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma^2$ буюу алдааны дисперс хугацаанаас үл хамаарна.

3. Алдаанууд корреляцгүй, өөрөөр хэлбэл $\mathrm{Cov}(u_t, u_s) = \mathrm{Cov}(\beta_2 t + \varepsilon_t, \beta_2 s + \varepsilon_s) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0$, $t \neq s$.

б) Өгөгдсөн бодлогын хувьд хамгийн бага квадратын аргын нэг тэгшитгэл нь $\sum e_t = \sum\limits_{n=1}^{n} (y_t - \alpha - \beta_1 x_t) = 0$ болно. Өөрөөр хэлбэл үлдэгдлүүдийн нийлбэр тэгтэй тэнцүү. Регрессоруудын нэг нь тогтмол байх дурын регрессийн хувьд энэ өгүүлбэр үнэн. $\mathrm{E}(u_t) = 0$ нөхцлийг тооцохгүйгээр үлдэгдлүүдийн нийлбэр тэг байх албагүй. Учир нь, сонгодог загварт үргэлж тогтмол регрессор байх албагүй. Иймд үлдэгдлүүдийн нийлбэр тэгтэй тэнцүү байх нь $\mathrm{E}(u_t) = 0$ нөхцөлтэй холбоогүй гэсэн дүгнэлтэд хүрнэ.

Бодлого 4.7. Хос регрессийн стандарт загвар өгөгдсөн байг:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

а) $\alpha = 0$ зааглалын үед β коэффициентийн ХБК-үнэлэлт юутай тэнцүү байх вэ?

б) Энэ тохиолдолд ХБК-үнэлэлтийн дисперсийг тооцож, зааглалгүй үеийн $\sigma^2 / \sum\limits_{t=1}^{n} (x_t - \overline{x})$ дисперсээс бага болохыг харуул. Энэ нь Гаусс-Марковын теоремийг зөрчих үү?

Бодолт. а) Өгөгдсөн зааглалын үед β коэффициентийн ХБК-үнэлэлт нь сул гишүүнгүй хос регрессийн загварын үнэлэлттэй ижил. Өөрөөр хэлбэл,

$$\widehat{\beta} = \frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}.$$

Энэ үнэлэлт хазайлттай байна. Үнэхээр,

$$\mathrm{E}(\widehat{\beta}) = \mathrm{E}\left(\frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}\right) = \frac{\sum x_t(\alpha + \beta x_t)}{\sum x_t^2} = \beta + \alpha\frac{\sum x_t}{\sum x_t^2}.$$

б) Үнэлэлтийн дисперс

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \mathrm{V}\left(\frac{\sum x_t y_t}{\sum x_t^2}\right) = \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2} \leq \frac{\sigma^2}{\sum x_t^2 - n\overline{x}^2} = \mathrm{V}(\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS}}).$$

Энэ нь Гаусс-Марковын теоремийг зөрчихгүй. Учир нь, үнэлэлт хазайлттай юм.

Бодлого 4.8. Сүүний худалдаа эрхэлдэг нэгэн фирмийн сар тутмын борлуулалтын хэмжээ Q (мян.л), P–үнэ (төг.1л) Хүснэгт 4.3–т өгөгдөв. Тав, зургаа, долдугаар саруудад уг фирмийн нэг үйлдвэрт ажил хаялт болсон. Тэгвэл Q–ийн P дээрх регрессийн тусламжтай:

а) ердийн саруудтай харьцуулахад, ажил хаялтын үед сул гишүүнд өөрчлөлт орсон эсэх

б) P регрессорын налуугийн коэффициент ба сул гишүүний хувьд шилжилт гарсан эсэхийг тодорхойл.

Сар	Q	P	Сар	Q	P
1	98	10.0	8	113	13.0
2	100	11.0	9	116	13.0
3	103	12.5	10	118	13.8
4	105	12.5	11	121	14.2
5	80	14.6	12	123	14.4
6	87	14.6	13	126	15.0
7	94	14.9	14	128	16.1

Хүснэгт 4.3:

Бодолт. Тав, зургаа, долоодугаар саруудын ажиглалтуудыг агуулсан бүх өгөгдлөөр Q–ийн P дээрх регрессийг байгуулбал дараах үр дүн гарав:

Хамааран хувьсагч: Q

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	74.819	34.281	2.183	0.0497
P	2.450	2.514	0.975	0.3490
R^2	0.0733			

Коэффициентууд нөлөөтэй байх магадлал бага, мөн детерминацийн коэффициент тэгд ойрхон (0.0733) байгаа нь регрессийн үр дүн муу гэдгийг хэлж байна. Хэрэв ажил хаялттай саруудын ажиглалтын утгыг хасвал регрессийн үр дүн өөр болно:

Хамааран хувьсагч: Q

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	36.617	8.229	4.450	0.0016
P	5.830	0.617	9.445	0.0000
R^2	0.9084			

Энэ регрессийн бүх коэффициентууд нөлөөтэй, детерминацийн коэффициент нь 0.9–өөс их байна. Иймд өгөгдсөн бодлогыг шийдвэрлэх илүү тохиромжтой арга нь ажил хаялтад харгалзах ажиглалтуудыг хассан үед регрессийг судлах явдал юм.

а) 1–4 саруудад 0 утга, 8–14 саруудад 1 утга авах (5, 6, 7–р сарын ажиглалтуудыг хассан) D гэсэн идэвхгүй хувьсагчийг оруулъя.

Q–ийн P ба D дээрх регресс дараах үр дүн өгнө:

Хамааран хувьсагч: Q

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	57.236	6.458	8.863	0.0000
P	3.849	0.555	6.930	0.0001
D	8.769	1.925	4.554	0.0019
R^2	0.9745			

D хувьсагчийн коэффициент 0.2%-түвшинтд нөлөөтэй байж болох нь харагдаж байна. Өөрөөр хэлбэл, ажил хаялтын дараа регрессийн сул гишүүнд шилжилт гарсан гэж үзэх үндэслэлтэй юм.

б) Асуултын энэ хэсэгт хариулахын тулд Q–ийн P, D ба $P \cdot D$ регрессоруудаар байгуулсан регрессийг авч үзье:

Хамааран хувьсагч: Q

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	73.389	7.932	9.253	0.0000
P	2.444	0.687	3.559	0.0092
D	−19.645	11.003	−1.781	0.1182
$P \cdot D$	2.667	0.873	2.598	0.0355
R^2	0.9745			

D хувьсагчийн өмнөх β_3 коэффициент нөлөөтэй бус байна (0.5%–ийн түвшинд). Гэвч, $\mathbf{H}_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$ таамаглалыг шалгаж үзэхэд F-тестийн харгалзах утга уг таамаглалыг 0.1%–ийн түвшинд няцаана. Өөрөөр хэлбэл, энэ загварын хүрээнд ажил хаялтын дараа тогтмол ба P хувьсагчийн коэффициентод шилжилт гарсныг нотлож байна.

Бодлого 4.9. Хүснэгт 4.4–т АНУ–ын 1939–өөс 1954 оны хугацаанд дотоод дахь хөрөнгө оруулалтын хэмжээ y, дотоодын нийт бүтээгдэхүүний (тэрбум.долл) хамт өгөгдөв. Хөрөнгө оруулалт дотоодын нийт бүтээгдэхүүнээс хамаарах хамаарал дайны жилүүдэд (1942–1945 он) энх цагийнхтай харьцуулахад өөрчлөгдсөн эсэхэд хариулах тэгшитгэлийг зохиож, үнэл.

Бодолт. Хүснэгтээс шинжилж үзвэл, дайны жилүүдийг хасахад x–ээс хамаарах y–ийн хамаарал шугаман болох нь ажиглагдаж байна. Дайны жилүүдэд харгалзах ажиглалтууд илэрхий “уналтыг” агуулж байна. Ажиглалтын бүх утгаар байгуулсан y–ийн x дээрх регресс дараах үр дүн өгнө:

Хамааран хувьсагч: y

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−14.362	7.543	−1.904	0.0777
x	0.192	0.030	6.368	0.0000
R^2	0.7434			

Жил	y	x	Жил	y	x
1939	9.3	90.8	1947	34.0	232.8
1940	13.1	100.0	1948	45.9	259.1
1941	17.9	124.9	1949	35.3	258.0
1942	9.9	158.3	1950	53.8	286.2
1943	5.8	192.0	1951	59.2	330.2
1944	7.2	210.5	1952	52.1	347.2
1945	10.6	212.3	1953	53.3	366.1
1946	30.7	209.3	1954	52.7	366.3

Хүснэгт 4.4:

Зөвхөн энх цагийн ажиглалтаар байгуулсан регресс:

Хамааран хувьсагч: y

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−3.335	4.086	−0.816	0.4334
x	0.167	0.015	10.872	0.0000
R^2	0.9220			

Хоёр регрессийг харьцуулан үзвэл дайны жилүүдийн ажиглалтын утгууд ерөнхий дүр зурагт сайн тохирохгүй байгаа нь харагдана. Хоёрдугаар регрессд x хувьсагчийн өмнөх коэффициентийн t-статистик өндөр, детерминацийн коэффициент эрс нэмэгдсэн байна.

Энх ба дайны жилүүдэд харгалзах загваруудын ялгааг Чоугийн тест хэрэглэн илүү үндэслэлтэйг харуулж болно. Бүх ажиглалтыг энх (1939–1941 он, 1946–1954 он) ба дайны (1942–1945 он) цагийн гэсэн хоёр бүлэгт хувааж анхны $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t$ регрессд Чоугийн тестийг ашиглая. F-статистикийн харгалзах утга 27.608, P-утга 0.0000 гэж олдоно. Энэ нь хоёр загвар давхцах тухай таамаглалыг няцааж байна.

Энэ дүгнэлтийг Чоугийн тестийг ашиглахгүйгээр, энх ба дайны жилүүдийг ялгаж өгөх идэвхгүй хувьсагчийн тусламжтай гарган авч болно. Дайны жилүүдэд харгалзах ажиглалтанд 1 утга авах, энхийн цагт 0 утга тус тус авах D хувьсагчийг оруулж ирье. Тэгвэл энхийн болон дайны жилүүдэд харгалзах загварууд давхцах тухай таамаглалыг дараах байдлаар шалгаж болно: y–ийн регрессийг тогтмол ба x, D, $D{\cdot}x$ регрессоруудаар байгуулж, сүүлийн хоёр коэффициент хамтдаа нөлөөтэй байх таамаглалыг шалгана. Регрессийн үр дүнг доор харууллаа:

Хамааран хувьсагч: y

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−3.335	3.836	−0.870	0.4016
x	0.167	0.014	11.583	0.0000
D	14.579	21.763	0.669	0.5162
$D \cdot x$	−0.182	0.111	-1.638	0.1273
R^2	0.9541			

$\mathbf{H}_0 : \beta_3 = \beta_4 = 0$ таамаглалыг шалгахад F-тестийн утга Чоугийн тестэд олдсон F-статистикийн утгатай ижил 27.608 гарна. Сүүлийн регрессийн β_3, β_4 коэффициентууд тус бүртээ нөлөөтэй биш боловч, хамтдаа нөлөөтэй байна. Иймээс $\mathbf{H}_0$ таамаглал няцаагдана.

Бодлого 4.10. Хүснэгт 4.5–д АНУ–ын нэхмэлийн үйлдвэрүүдийн 1974 оны нэгдүгээр улирлаас 1979 оны гуравдугаар улирлын болрлуулалтын хэмжээ ба орлого өгөгджээ. Орлогыг борлуулалтаас хамааруулан регресс зохиож, идэвхгүй хувьсагч оруулах замаар улирлын нөлөө байгаа эсэхийг судал.

Жил	Улирал	Худалдааны хэмжээ	Орлого
1974	I	242.0	13.5
	II	269.4	16.3
	III	272.1	15.5
	IV	277.0	13.4
1975	I	247.1	9.3
	II	265.8	12.4
	III	271.0	13.2
	IV	281.3	14.2
1976	I	284.2	14.8
	II	307.6	18.1
	III	301.6	16.0
	IV	309.8	15.6
1977	I	311.5	15.6
	II	338.6	19.7
	III	331.7	16.7
	IV	346.2	18.4
1978	I	340.2	16.0
	II	377.5	22.1
	III	376.9	20.4
	IV	401.8	22.6
1979	I	406.2	22.6
	II	436.4	26.8
	III	437.5	24.8

Хүснэгт 4.5: D.Salvatore. Statistics and Econometrics, McGraw-Hill, 1982

Бодолт. Орлогыг борлуулалтаас хамааруулсан графикаас харахад шугаман регрессийн загвар ашиглах нь зүй ёсны байна. Борлуулалтын хэмжээг VOL, харин орлогыг INC гэж тэмдэглээд, $INC = \beta_1 + \beta_2 VOL$ регрессийг үнэлье:

Хамааран хувьсагч: INC

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−5.056	1.682	−3.006	0.0067
VOL	0.069	0.005	13.503	0.0000
R^2	0.8967			

Гарган авсан үр дүн харьцангуй цөөн тооны ажиглалтын хувьд коэффициентуудын нөлөө өндөр байгааг нотолж байна.

Улирлын нөлөөг харуулах $QRTi_t$, $i = 1, 2, 3, 4$ идэвхгүй хувьсагчдыг оруулж ирье. Үүнд, хэрэв t дүгээр ажиглалт i улиралд харгалзах бол $QRTi_t = 1$, эсрэг тохиолдолд $QRTi_t = 0$. Одоо $INC = \beta_1 + \beta_2 VOL + \gamma_1 QRT1 + \gamma_2 QRT2 + \gamma_3 QRT3$ регрессийг үнэлье. Бид $QRT4$ хувьсагчийг регрессд оруулаагүй. Учир нь, "*dummy trap*" буюу хувьсагчид шугаман хамааралтай болоход хүрнэ. Үнэндээ, $QRT1 + QRT2 + QRT3 + QRT4 \equiv 1$ билээ:

Хамааран хувьсагч: INC

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−4.874	1.568	−3.109	0.0061
VOL	0.067	0.005	14.791	0.0000
$QRT1$	−0.329	0.749	−0.440	0.6655
$QRT2$	1.767	0.746	2.368	0.0293
$QRT3$	0.350	0.746	0.470	0.6443
R^2	0.9331			

Зөвхөн $QRT2$ хувьсагчийн өмнөх коэффициент 3%–ийн итгэх түвшинд тэгээс ялгаатай болох нь харагдаж байна. Харин γ_1, γ_3 коэффициентууд хамтдаа нөлөөтэй биш. Ийнхүү орлогын дундаж хэлбийлт зөвхөн хоёрдугаар улиралд гарах боломжтой юм. INC–ийн VOL ба $QRT2$ дээрх регрессийн үнэлэлт дараах байдлаар олдоно:

Хамааран хувьсагч: INC

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−5.096	1.421	−3.585	0.0018
VOL	0.068	0.004	15.610	0.0000
$QRT2$	1.750	0.570	3.069	0.0061
R^2	0.9298			

Одоо хоёрдугаар улирал VOL хувьсагчийн өмнөх β_2 коэффициентод нөлөөлөх үү? гэсэн асуулт тавья. Үүний тулд

$$INC = \beta_1 + \beta_2 VOL + \gamma_2 QRT2 + \delta_2 QRT2 \cdot VOL$$

регрессийг үнэлэх хэрэгтэй:

Хамааран хувьсагч: INC

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−4.501	1.701	−2.647	0.0159
VOL	0.066	0.005	12.611	0.0000
$QRT2$	−0.359	3.250	−0.110	0.9137
$QRT2 \cdot VOL$	0.006	0.010	0.659	0.5179
R^2	0.9298			

Хэдийгээр γ_2, δ_2 коэффициент тус бүр нөлөөтэй биш боловч, $\mathbf{H}_0 : \gamma_2 = \delta_2 = 0$ таамаглалыг шалгахад харгалзах F-статистикийн утга 4.720 ба P-утга 0.0207 гарсан нь $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг 2%–ийн түвшинд няцааж байна. Хэрэв зөвхөн VOL

ба $QRT2 \cdot VOL$ регрессоруудаар INC–ийн регрессийг байгуулбал $QRT2 \cdot VOL$–ийн коэффициент 1%–ийн түвшинд нөлөөтэй. Иймд INC–ийн VOL дээрх регрессийн хувьд хоёрдугаар улирал VOL хувьсагчийн коэффициент болон сул гишүүнд нөлөөлнө гэж дүгнэж болно.

Бодлого 4.11. АНУ–ын 1964–өөс 1979 оны импортын хэмжээ y (тэрбум.долл), үндэсний нийт бүтээгдэхүүн x_1 (тэрбум.долл), хэрэглэгчийн үнийн индекс x_2 Хүснэгт 4.6–т өгөгдөв.

Жил	y	x_1	x_2	Жил	y	x_1	x_2
1964	28.4	635.7	92.9	1972	75.9	1171.1	125.3
1965	32.0	688.1	94.5	1973	94.4	1306.6	133.1
1966	37.7	753.0	97.2	1974	131.9	1412.9	147.7
1967	40.6	796.3	100.0	1975	126.9	1528.8	161.2
1968	47.7	868.5	104.2	1976	155.4	1702.2	170.5
1969	52.9	935.5	109.8	1977	185.8	1899.5	181.5
1970	58.5	982.4	116.3	1978	217.5	2127.6	195.4
1971	64.0	1063.4	121.3	1979	260.9	2368.5	217.4

Хүснэгт 4.6: D.Salvatore. Statistics and Econometrics, McGraw-Hill, 1982

а) x_1, x_2 хувьсагчдын хоорондох түүврийн корреляцийн коэффициентийг ол.
б) y–ийн x_1 дээрх регрессийг үнэл.
в) y–ийн x_2 дээрх регрессийг үнэл.
г) y–ийн x_1, x_2 дээрх регрессийг үнэл.
Дээрх үр дүнгүүдийг хэрхэн тайлбарлаж болох вэ? Зөвхөн б) эсвэл в) регрессээр хязгаарлаж болох уу?

Бодолт. а) x_1 ба x_2 хувьсагчдын хоорондох түүврийн корреляцийн коэффициентийг шууд бодоход 0.997 байна. Энэ өндөр утга, x_1, x_2 гэсэн тайлбарлагч хувьсагчийг нэгэн зэрэг агуулах регресс мультиколлинеар шинжтэй болохыг харуулна.

б), в) Доор y–ийн x_1 болон x_2 дээрх (мөн тогтмол) регрессүүдийн үр дүнг үзүүллээ.

Хамааран хувьсагч: y

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−69.027	5.750	−12.004	0.0000
x_1	0.134	0.004	31.866	0.0000
R^2	0.9864			

Хамааран хувьсагч: y

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−146.516	8.335	−17.579	0.0000
x_2	1.824	0.060	30.795	0.0000
R^2	0.9855			

Хоёр регрессийн үр дүн хоёулаа өндөр байна. Өөрөөр хэлбэл x_1, x_2 хувьсагчид тус бүртээ y–ийн өөрчлөлтийг сайн тайлбарлана гэсэн үг.

г) y–ийн тогтмол болон x_1, x_2 дээр байгуулсан регресс:

Хамааран хувьсагч: y

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−101.489	33.080	−3.068	0.0090
x_1	0.079	0.560	1.403	0.1839
x_2	0.759	0.761	0.996	0.3372
R^2	0.9874			

Коэффициентуудын нөлөө эрс унаж байгаа явдал бол регрессоруудын хооронд хүчтэй мультиколлинеар шинж байгаатай холбоотой юм.

Хэрэв y хувьсагчийн утганд прогноз хийх шаардлагатай бол б) эсвэл в)–д олсон дурын регрессийг ашиглаж болно. Учир нь, коэффициентуудын нөлөө өндөр, детерминацийн коэффициент R^2–ын утга их байгаа явдал нь прогнозын нарийн утга гаргаж авах хангалттай шалтгаан юм. Гэвч, x_1, x_2 хүчин зүйлүүдийн y–д нөлөөлөх нөлөөг үнэлэх шаардлагатай бол хэдийгээр үнэлэлтийн нарийвчлал бага хэдий ч г) регрессийг ашиглахад хүрнэ.

Бодлого 4.12. Хүснэгт 4.7–д тодорхой хугацааны туршид 15 фирмийн үйлдвэрлэсэн бүтээгдэхүүн Q, хөдөлмөр зарцуулалт L, хөрөнгө оруулалт K өгөгджээ.

Фирм	Q	L	K	Фирм	Q	L	K
1	2350	2334	1570	9	2550	2446	1880
2	2470	2425	1850	10	2450	2403	1790
3	2110	2230	1150	11	2290	2301	1480
4	2560	2463	1940	12	2160	2253	1240
5	2650	2565	2450	13	2400	2367	1660
6	2240	2278	1340	14	2490	2430	1850
7	2430	2380	1700	15	2590	2470	2000
8	2530	2437	1860				

Хүснэгт 4.7:

а) Эдгээр өгөгдлүүдээр Кобб-Дугласын үйлдвэрлэлийн $Q = \alpha L^{\beta_1} K^{\beta_2}$ функцийг үнэлж, детерминацийн коэффициент, детерминацийн засварлагдсан коэффициент ба $\ln L$, $\ln K$–ийн хоорондох түүврийн корреляцийн коэффициентийг тус тус ол.

б) $\ln Q$–ийн регрессийг зөвхөн $\ln K$–аар байгуул.

Гарсан үр дүнгүүдийг хэрхэн тайлбарлах вэ?

Бодолт. а) Кобб-Дугласын $Q = \alpha L^{\beta_1} K^{\beta_2}$ функцийг логарифмчлая. Тэгвэл $\ln Q = \ln \alpha + \beta_1 \ln L + \beta_2 \ln K$ болох ба энэ регрессийн үнэлэлт дараах үр дүн өгнө:

Хамааран хувьсагч: $\ln Q$

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	0.501	4.480	0.112	0.9129
$\ln L$	0.758	0.707	1.071	0.3052
$\ln K$	0.188	0.139	1.356	0.2001
R^2	0.9689			

Детерминацийн засварлагдсан коэффициентийг

$$R^2_{\text{adj}} = 1 - (1 - R^2)\frac{n-1}{n-k}$$

томъёогоор олбол $R^2_{\text{adj}} = 0.9637$ (§ 3.4).

$\ln L$, $\ln K$ регрессоруудын түүврийн корреляцийн коэффициент 0.992 байгаа нь β_1, β_2 коэффициентууд нөлөөтэй биш байх шалтгаан болно (өмнөх 4.11 бодлогын адил).

б) $\ln Q$–ийн $\ln K$ дээрх регресс:

Хамааран хувьсагч: $\ln Q$

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	5.297	0.130	40.778	0.0000
$\ln K$	0.335	0.017	19.192	0.0000
R^2	0.9659			

Энэ регрессийн коэффициентууд нөлөөтэй бөгөөд детерминацийн коэффициент нь өмнөх регрессийн детерминацийн коэффициентоос багаар ялгагдаж байна.

Мөн өмнөх Бодлого 4.11–ын адил зөвхөн $\ln K$ (эсвэл $\ln L$) хувьсагчаар байгуулсан $\ln Q$–ийн регрессийг прогноз хийх зорилгоор ашиглаж болно. Гэвч үйлдвэрлэлийн мэдрэмжийг хөдөлмөр ба хөрөнгө оруулалтаас хамааруулан тодорхойлоход уг хоёр хувьсагчийг агуулсан регрессийг зайлшгүй авч үзэх шаардлагатай бөгөөд мультиколлинеар шинжээс шалтгаалан эдгээр мэдрэмжийн үнэлэлт багагүй алдаатай олддог. Мультиколлинеар шинжийг даван туулах боломжит аргуудын нэгийг дараагийн Бодлого 4.13–д авч үзэх болно.

Бодлого 4.13. Хэрэв үйлдвэрлэлийн функц тогтмол өгөөжтэй ($\beta_1 + \beta_2 = 1$) бол Бодлого 4.12–д тулгарсан мультиколлинеар шинжийг даван туулж болох уу?

Бодолт. Бодлого 4.12–ын а)–д буй $\ln Q = \ln\alpha + \beta_1 \ln L + \beta_2 \ln K$ регрессийн хувьд $\mathbf{H}_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1$ таамаглалыг шалгая. Тэгвэл F-статистикийн утга 0.009, P-утга 0.9255 гарна. Өөрөөр хэлбэл, энэ таамаглалыг няцаахгүй. Анхны тэгшитгэлд $\beta_2 = 1 - \beta_1$ орлуулга ба хялбар хувиргалт хийвэл

$$\ln\frac{Q}{K} = \ln\alpha + \beta_1 \ln\frac{L}{K}$$

тэгшитгэлд хүрнэ. Энэ тэгшитгэлд үнэлье:

Хамааран хувьсагч: $\ln Q/K$

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	0.073	0.008	9.261	0.0000
$\ln L/K$	0.825	0.021	39.812	0.0000
R^2	0.9919			

Эндээс харахад регрессийн чанар сайжирсан ба $\beta_1 + \beta_2 = 1$ гэсэн зааглал оруулах нь тухайн тохиолдолд мультиколлинеараас зайлсхийх боломжийг олголоо.

Бодлого 4.14. Төмөрлөгийн үйлдвэрийн нийт бүтээгдэхүүн гаргалт Q/L цалингийн түвшин W–аас хамаарах тухай таамаглалыг шалгахдаа улс хоорондын ажиглалтаас олдсон

$$\ln\frac{Q}{L} = 0.374 + \underset{(0.049)}{0.805}\, W + e, \quad R^2 = 0.929$$

регресс дээр тулгуурлажээ (хаалтанд стандарт алдааг заав).

а) Уг таамаглалыг шалга.

б) Үр ашгийн үзүүлэлт нь улс орон бүрт харицлан адилгүй. Дээрх загварт ашгийн үзүүлэлтийг тооцоогүй юм. Иймд загвар тодорхойлоход алдаа гарсан гэж үзэж болно. Ингэж үзэх нь бидний дүгнэлтэд ямар нөлөө үзүүлэх вэ? Үр ашгийн үзүүлэлт бол нийт бүтээгдэхүүн гаралтад нөлөөлөх бөгөөд цалингийн хэмжээтэй эерэг корреляц хамааралтай юм.

Бодолт. а) Өгөгдсөн нөхцөлийг өгүүлбэрийг шалгахдаа $\mathbf{H}_0 : \beta_2 = 0$ таамаглалыг ашиглана. Бидэнд ажиглалтын тоо n өгөгдөөгүй. Хэдий тийм боловч, β_2 коэффициентийн t-статистикийн квадрат манай тохиолдолд (3.31) статистикийн $k = 2$ үеийн утгатай давхцана:

$$t_2^2 = \left(\frac{\widehat{\beta}_2}{\widehat{\sigma}_{\widehat{\beta}_2}}\right)^2 = \frac{R^2}{1-R^2}(n-2).$$

Энэ илэрхийллээс n–ийг олбол:

$$n = 2 + t^2\frac{1-R^2}{R^2}.$$

Хэрэв $t^2 = (0.805/0.049)^2 = 16.429^2 = 269.900$, $R^2 = 0.929$ болохыг харгалзан үзвэл $n = 23$ болно. $t = 16.429$ утгыг $t_{0.95}(21) = 2.080$–тай харьцуулан үзвэл $\mathbf{H}_0 : \beta_2 = 0$ таамаглал няцаагдана. Өөрөөр хэлбэл, авч үзэж буй загварын хүрээнд нийт бүтээгдэхүүн гаргалт цалингийн зардлаас хамаарна.

б) Зардал ба нийт бүтээгдэхүүн гаргалттай нэгэн зэрэг эерэг корреляц хамааралтай шинэ үл хамаарах хувьсагчийг загварт нэмж оруулснаар (тухайн тохиолдолд, үр ашгийн түвшинг илэрхийлэх тоон үзүүлэлт) W–ийн өмнөх коэффициентийн үнэлэлтийг бууруулах, улмаар түүнийг нөлөөтэй биш болгох нь бий.

Бодлого 4.15. Улирал тутмын ажиглалт дээр тулгуурлан хамгийн бага квадратын аргаар

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 d_{t2} + \beta_3 d_{t3} + \beta_4 d_{t4} + \beta_5 x_t + \varepsilon_t$$

загварыг үнэлжээ. Энд, d_{ti}, $i = 2, 3, 4$ нь улирлуудад харгалзах идэвхгүй хувьсагчид. Өөрөөр хэлбэл, t нь хоёрдугаар улирал бол $d_{t3} = 1$, эсрэг тохиолдолд $d_{t2} = 0$, үүний адил t нь гуравдугаар улирал бол $d_{t2} = 1$, эсрэг тохиолдолд, $d_{t3} = 0$ гэх мэт.

а) Ямар учраас d_{t1} хувьсагчийг загварт оруулаагүй вэ?

б) $\widehat{\beta}_5$ үнэлэлт $y_t^* = \alpha + \beta x_t^* + u_t$ регрессийн ХБК-үнэлэлттэй давхцана гэдгийг үзүүл. Энд, y_t^* нь y_t–ийн d_{t2}, d_{t3}, d_{t4} ба тогтмолоор байгуулсан регрессийн үлдэгдэл, мөн x_t^* нь x_t–ийн d_{t2}, d_{t3}, d_{t4} ба тогтмолоор байгуулсан регрессийн үлдэгдэл.

Бодлого 4.16. Дараах тэнцэтгэлийг батал ((4.8)–ийг үз).

$$r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{x}_2) = \frac{r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_1) - r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2)r(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)}{\sqrt{1 - r(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)}\sqrt{1 - r(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_2)}}$$

Бодлого 4.17. (4.21) ба (4.22) томъёонууд эквивалент гэдгийг батал.

Бодлого 4.18. Үнэн загвар

$$\begin{aligned} &y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t, \\ &\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma^2, \quad \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \quad t \neq s, \quad t = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

харьцаануудаар өгөгдсөн байг. Энэ загвар дахь β_1 параметрийн ХБК-үнэлэлтийг $\widehat{\beta}_1$ гэж тэмдэглэе. Харин $\widehat{\beta}_1^*$ нь уг параметрийн зөвхөн x_1 хувьсагчийн хувь дахь ХБК-үнэлэлт байг.

а) Дараах

$$\frac{\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_1^*)}{\mathrm{MSE}(\widehat{\beta}_1} = 1 + r_{12}^2(t_2^2 - 1)$$

тэнцэтгэлийг батал. Үүнд,

$$r_{12}^2 = \frac{(\sum x_1 x_2)^2}{\sum x_1^2 \sum x_2^2} = \frac{(\boldsymbol{x}_1' \boldsymbol{x}_2)^2}{\boldsymbol{x}_1' \boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2' \boldsymbol{x}_2}, \quad t_2^2 = \frac{\beta_2^2}{\mathrm{V}(\widehat{\beta}_2)}.$$

б) $\widetilde{\beta}_1 = \lambda \widehat{\beta}_1 + (1 - \lambda)\widehat{\beta}_1^*$ холимог үнэлэлтийг авч үзье. λ параметрийн ямар утганд $\mathrm{MSE}(\widetilde{\beta}_1)$ хамгийн бага утгандаа хүрэх вэ?

Бодлого 4.19. Регрессийн загвар (үнэн)

$$\begin{aligned} &y_t = \beta x_t + \gamma z_t + \varepsilon_t, \\ &\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0, \quad \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \sigma_\varepsilon^2, \quad \mathrm{E}(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \quad t \neq s, \quad t = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

харьцаануудаар өгөгдсөн байг. Хэрэв x хувьсагч алдаатай ажиглагдсан бол регрессийн загварт $w_t = x_t + u_t$ хэмжигдхүүнийг ашиглаж болох ба u алдаа $\mathrm{E}(u_t) = 0$, $\mathrm{E}(u_t^2) = \sigma_u^2$, $t \neq s$ үед $\mathrm{E}(u_t u_s) = 0$ ба дурын s, t–ийн хувьд $\mathrm{E}(u_t \varepsilon_s) = 0$ гэсэн нөхцөлүүдийг хангана гэж үзнэ.

$\boldsymbol{y}$–ийн регрессийг хоёр янзаар, нэгдүгээрт $\boldsymbol{z}$, хоёрдугаарт $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{w}$ векторуудаар байгуул. Хоёрдугаар регрессийн γ параметрийн үнэлэлтийн хазайлт эхний регрессийнхээс бага болохыг үзүүл.

Бодлого 4.20. Хувьсагчид нь түүврийн дунджаас хазайх хазайлтаараа илэрхийлэгдсэн регрессийн загвар өгөгдсөн байг:

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Өөрөөр хэлбэл $\overline{y} = \overline{x}_1 = \overline{x}_2 = 0$.

а) Хамгийн бага квадратын аргаар олсон $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$ үнэлэлтүүдийн дисперс ба ковариац

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} x_{t1}^2(1-r_{12}^2)}, \quad \mathrm{V}(\widehat{\beta}_2) = \frac{\sigma^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} x_{t2}^2(1-r_{12}^2)},$$

$$\mathrm{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2) = \frac{-\sigma^2 r_{12}}{(1-r_{12}^2)\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} x_{t1}^2 \sum\limits_{t=1}^{n} x_{t2}^2}}$$

болохыг харуул. Үүнд, r_{12} нь x_1 ба x_2 хувьсагчдын хоорондох түүврийн корреляцийн коэффициент:

$$r_{12} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} x_{t1}x_{t2}}{\sqrt{\sum\limits_{t=1}^{n} x_{t1}^2 \sum\limits_{t=1}^{n} x_{t2}^2}}.$$

б) $r_{12} = 0$ үед дисперсүүд ба ковариацийн коэффициент юутай тэнцүү байх вэ? Энэ нь мультиколлинеар шинжтэй яаж холбогдох вэ?

в) $\mathrm{V}(\widehat{\beta}_1)$, $\mathrm{V}(\widehat{\beta}_2)$ дисперсүүдийн харьцааг ол ($0 < r_{12} < 1$ завсарт).

г) r_{12} нь $0 < r_{12} < 1$ завсарт өсөхөд $\mathrm{Cov}(\widehat{\beta}_1, \widehat{\beta}_2)$ ковариац ба $\widehat{\beta}_1$, $\widehat{\beta}_2$ коэффициентуудын 95%–ийн итгэх завсар ямар төлөвтэй байх вэ?

Бодлого 4.21. Олон хэмжээст регрессийн $y = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ стандарт загвар өгөгдсөн бөгөөд $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ нь $\boldsymbol{\beta}$ векторын ХБК-үнэлэлт байг.

а) Хэрэв $\boldsymbol{\beta}$ вектор $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{r}$ шугаман хязгаарлалтыг хангах нь мэдэгдэж байгаа бол $\boldsymbol{\beta}$ векторын илүү эрчимтэй үнэлэлт гарган авахын тулд $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ үнэлэлтийг хэрхэн ашиглах вэ?

б) $y_t = \alpha + \beta x_{t1} + \gamma x_{t2} + \varepsilon_t$ загварын хувьд $n = 100$ ажиглалтаар дараах өгөгдлүүдийг (харгалзах хувьсагчдын үржвэрийн нийлбэр) гарган авчээ.

	$y-\overline{y}$	$x_1-\overline{x}_1$	$x_2-\overline{x}_2$
$y-\overline{y}$	2000	100	90
$x_1-\overline{x}_1$	100	10	5
$x_2-\overline{x}_2$	90	5	5

$\mathbf{H}_0 : 5\beta = \gamma$ таамаглалыг $H_1 : 5\beta \neq \gamma$ гэсэн өрсөлдөгч таамаглалын нөхцөлд шалга.

Бодлого 4.22. Хамгийн бага квадратын аргаар $\boldsymbol{y} = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{e}$ ба $\boldsymbol{y} = \widehat{\alpha}^* + \widehat{\beta}^*\boldsymbol{x} + \widehat{\gamma}^*\boldsymbol{z} + \boldsymbol{u}$ гэсэн хоёр загвар тодорхойлогдсон байг. Энд, $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{u}$ нь харгалзах регрессүүдийн үлдэгдэл. Ямар үндэслэлээр дараах нөхцөлүүд биелэх вэ?:

а) $\widehat{\beta} = \widehat{\beta}^*$;

б) $\sum u_t^2 \leq \sum e_t^2$;

в) $\widehat{\beta}$ үнэлэлт 5%–ийн түвшинд нөлөөтэй, харин $\widehat{\beta}^*$ үнэлэлт 5%–ийн түвшинд нөлөөтэй биш;

г) $\widehat{\beta}^*$ үнэлэлт 5%–ийн түвшинд нөлөөтэй, харин $\widehat{\beta}$ үнэлгээ 5%–ийн түвшинд нөлөөтэй биш.

Бодлого 4.23. Олон хэмжээст стандарт $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ регрессийн загвар өгөгдсөн байг.

а) $\boldsymbol{\beta}$ векторын ХБК-үнэлэлтийн ковариацийн матрицыг $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ матрицын хувийн утга ба хувийн векторын хэлээр илэрхийл.

б) а)–д гаргасан үр дүн мультиколлинеартай хэрхэн холбогдож байгааг тайлбарла.

Бүлэг 5

Олон хэмжээст регрессийн зарим өргөтгөлүүд

Энэ бүлэгт сонгодог регрессийн схемийг хоёр чиглэлд өргөтгөнө. Эхнийх нь үл хамаарах хувьсагчдыг санамсаргүй хэмжигдэхүүн гэж авах ба регрессоруудын $\boldsymbol{X}$ матриц алдааны ε вектортой корреляц хамааралгүй бол үл мэдэгдэх параметрүүдийн векторын ХБК-үнэлэлт нь стандарт загвар дахь ХБК-үнэлэлтийн үндсэн чанаруудыг хадгална.

Хоёр дахь чиглэл нь алдааны ε векторын ковариацийн матриц $\sigma^2 \boldsymbol{I}_n$ гэсэн скаляр хэлбэртэй байх албагүй тохиолдолд шугаман загварыг авч үзэх явдал юм. Өөрөөр хэлбэл, $\boldsymbol{\Omega}$ нь эерэг тодорхойлогдсон, тэгш хэмт, дурын матриц байх тохиолдлыг авч үзнэ.

Анхны системийг шугаман хувиргалтын тусламжтай ердийн регрессийн тэгшитгэлд шилжүүлж, түүний коэффициентуудын векторын ХБК-үнэлэлтийг байгуулж болно. Энэ үнэлэлт ε алдааны ковариацийн матрицаас хамаарах ба үнэлэх аргыг *хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн (ХБКӨ) арга* гэнэ. (*Generalized Least Squares*, GLS). ХБКӨ-үнэлэлтийн хувьд Гаусс-Марковын теоремийг томъёолж болох ба *энэ үнэлэлт бүх хазайлтгүй шугаман үнэлэлтийн ангид хамгийн бага ковариацийн матрицтай байна* гэж баталдаг. Хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн арга регрессийн загварын зарим чухал ангиудыг судлах нэгдсэн аргачлал болж өгнө. Тухайлбал, гетероскедастик буюу $\boldsymbol{\Omega}$ матриц диагонал хэлбэртэй бөгөөд гол диагоналийн элементүүд нь ялгаатай байх загварууд, мөн ажиглалтууд хугацааны цуваа үүсгэх ба алдаанууд нь хугацааны хувьд корреляцтай байх загварууд гэх мэт. Энэ тухайд Бүлэг 6–д судална. Эцэст нь тэмдэглэхэд, ХБКӨ-үнэлэлт байгуулахад $\boldsymbol{\Omega}$ матрицыг мэдэж байх шаардлагатай хэдий ч бодит байдал дээр үнэндээ үл мэдэгдэнэ. Энэ шалтгаанаар практикт хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргыг ашиглахад хүндрэл учирдаг. Үүнтэй уялдан *ХБК-ын, нэмэлт нөхцөлтэй өргөтгөсөн арга* (Feasible Generalized Least Squares) хэрэглэх асуудал тулгарна. Энэ тухай Бүлэг 7–д авч үзнэ.

5.1 Стохастик регрессорууд

Өмнөх хэсгүүдэд үл хамаарах хувьсагчдыг ($\boldsymbol{X}$ матриц) санамсаргүй биш гэж үзэж ирсэн. Энэ нөхцөл ямагт биелэх албагүй. Жишээлбэл, олонх тохиолдолд үл хамаарах хувьсагчдыг хэмжихэд санамсаргүй алдаа гарна. Үүнээс гадна, хугацааны цуваг шинжлэх явцад судалж буй хэмжигдэхүүний хугацааны t агшин дахь утга өмнөх агшны утгаасаа хамаарч болно. Өөрөөр хэлбэл, эдгээр утга зарим тэгшитгэлд үл хамаарах, зарим тэгшитгэлд хамааран хувьсагчийн (лагтай хувьсагч бүхий загвар) үүрэг гүйцэтгэнэ. Ийм учраас стохастик регрессоруудтай загвар авч үзэх шаардлага гардаг.

Энд санал болгож буй хандлага нь үнэн чанартаа, сонгодог регрессийн ХБК-үнэлэлтийн үндсэн бүх чанарыг хадгалах боломжийг олгож байгаа юм. Стохастик регрессоруудын системд тавигдах нөхцөл, стандарт загварын зааглалуудыг бараг үгчлэн давтах бөгөөд регрессоруудыг зөвхөн шууд бус, нөхцөлт (бэхлэгдсэн $\boldsymbol{X}$) утгаар ойлгоно. Бид уншигч таныг нөхцөлт тархалт, нөхцөлт математик дунджийн тухай доор ашиглагдах хялбар чанаруудыг мэднэ гэж найдаж байна.

Өмнөхийн адил

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

загварыг авч үзье. Үүнд, $\boldsymbol{y}$–хамааран хувьсагчдын $n \times 1$ вектор, $\boldsymbol{X}$–үл хамаарах хувьсагчдын $n \times k$ хэмжээст матриц, $\boldsymbol{\varepsilon}$–алдааны санамсаргүй $n \times 1$ вектор. $\boldsymbol{X}$ матрицын элементүүдийг санамсаргүй гэж тооцох бөгөөд дараах нөхцөлүүд биелдэг гэе.

1) $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{0}$,

2) $\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{X}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$,

3) Ямарч тохиолдолд $\boldsymbol{X}$ матриц k рангтай (1 магадлалтайгаар).

Энд $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{X})$ нь бэхлэгдсэн $\boldsymbol{X}$ матрицын хувьд санамсаргүй $\boldsymbol{\varepsilon}$ векторын нөхцөлт математик дундаж, $\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'|\boldsymbol{X})$ нь энэ векторын нөхцөлт ковариацийн матриц. 1) ба 2) нөхцөл

1′) $\mathrm{E}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$,

2′) $\mathrm{V}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$ нөхцөлүүдтэй эквивалент гэдгийг тэмдэглэе.

Аливаа $\boldsymbol{X}$ матрицын хувьд 3) нөхцөл ёсоор $\boldsymbol{\beta}$ векторын ХБК-үнэлэлт оршин байх бөгөөд тэр нь $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$ байг. Мөн $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{y}$ үлдэгдлийн вектор, $\sigma^2 = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)$ дисперсийн үнэлэлт, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$–ийн ковариацийн матрицын үнэлэлт $\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ бол

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{X}) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{X})\\
&= \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{\beta},\\
\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{X}) &= \mathrm{V}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathrm{V}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\\
&= \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1},\\
\mathrm{E}(\boldsymbol{e}|\boldsymbol{X}) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{M}\mathrm{E}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0},\\
\mathrm{V}(\boldsymbol{e}|\boldsymbol{X}) &= \mathrm{V}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{M}\mathrm{V}(\boldsymbol{y}|\boldsymbol{X})\boldsymbol{M}' = \sigma^2\boldsymbol{M}.
\end{aligned}$$

Эндээс

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}|\boldsymbol{X}) &= \sigma^2\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}), \qquad \mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2|\boldsymbol{X}) = \sigma^2, \\
\mathrm{E}(\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})|\boldsymbol{X}) &= \mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}|\boldsymbol{X}) = \mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2|\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \\
&= \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}
\end{aligned}
$$

байх нь мөрднө. Иймхүү $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, $\widehat{\sigma}^2$ ба $\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ нь нөхцөлт хазайлтгүй байна. Мөн нөхцөлт математик дунджийн чанар болох давхар дунджийн дүрмийг ашилан эдгээр үнэлэлтийг нөхцөлт бус хазайлтгүй гэдгийг харуулж болно:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}|\boldsymbol{X})) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\beta}, \\
\mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2|\boldsymbol{X})) = \sigma^2, \\
\mathrm{E}(\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})|\boldsymbol{X})) = \sigma^2\mathrm{E}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) = \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

Гаусс-Марковын теоремийн хувилбарыг дээрхийн адил батлахад төвөггүй. Өөрөөр хэлбэл $\boldsymbol{\beta}$ векторын шугаман бөгөөд нөхцөлт хазайлтгүй бүх үнэлэлтүүдийн дотор түүний ХБК-үнэлэлт хамгийн бага нөхцөлт ковариацийн матрицтай байна. Иймд 1), 2), 3) нөхцөлүүд биелэх үед стохастик регрессор бүхий загварын ХБК-үнэлэлт, сонгодог загварын ХБК-үнэлэлттэй адил чанарыг хангана.

1), 2) нөхцөл $\boldsymbol{X}$ ба $\boldsymbol{\varepsilon}$ векторын хамтын тархалттай холбоотой бөгөөд тухайн тохиолдолд 1) нөхцлөөс тэдгээр нь хоорондоо корреляц хамааралгүй гэдэг нь мөрднө. Үнэхээр, $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}|\boldsymbol{X})) = \boldsymbol{0}$ тул $\mathrm{Cov}(x_{ij}, \varepsilon_m) = \mathrm{E}(x_{ij}\cdot\varepsilon_m) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(x_{ij}\cdot\varepsilon_m|\boldsymbol{X})) = \mathrm{E}(x_{ij}\mathrm{E}(\varepsilon_m|\boldsymbol{X})) = 0$ ба урвуу өгүүлбэр үнэн байх албагүй. Гэвч $\boldsymbol{X}$ ба $\boldsymbol{\varepsilon}$ хамааралгүй бөгөөд $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2\boldsymbol{I}$ бол 1), 2) биелэнэ.

Эцэст нь ХБК-үнэлэлт зохимжтой эсэх тухай асуудал дээр тогтъё. Параметрийн үнэлэлт зохимжтой байна гэдэг нь түүний магадлалын хязгаар ажиглалтын тоо нэмэгдэхэд параметрийн жинхэнэ утга руу тэмүүлнэ гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл, $\boldsymbol{p}\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$ хязгаар биелэх үед нөхцлийг томъёолно гэсэн үг. Ингээд $n \to \infty$ байг (n нь ажиглалтын тоо бөгөөд n нэмэгдэхэд $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ векторуудын хэмжээс, $\boldsymbol{X}$ матрицын мөрийн тоо ихэсэх ба харин $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ векторын хэмжээс k хэвээр үлдэнэ). Дараах элементар хувиргалтыг хийе:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \\
&= \boldsymbol{\beta} + \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right). \qquad (5.2)
\end{aligned}
$$

Дараах нөхцөлүүд биелдэг гэе.

4) $\boldsymbol{p}\lim\limits_{n\to\infty} 1/n\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$ хязгаар олдоод, $\boldsymbol{A}$ матриц эерэг тодорхойлогсон байх,

5) $\boldsymbol{p}\lim\limits_{n\to\infty} 1/n\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}$ байх.

Тэгвэл Слуцкийн теорем ёсоор $\boldsymbol{p}\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$ байна. Өөрөөр хэлбэл $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ үнэлэлт зохимжтой. Зарим тохиолдолд 4), 5) нөхцөлүүдийг хялбархан шалгаж болно. Жишээлбэл, $\boldsymbol{X}$ матрицын мөрүүд үл хамаарах бөгөөд ижил тархалттай; алдааны вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$ нэгэн ижил тархалттай үл хамаарах компонентуудаас тогтдог; $\mathrm{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{X}$ ба $\boldsymbol{\varepsilon}$ хамааралгүй байг. Тодруулж хэлбэл, ажиглалт бүрт тайлбарлагч хувьсагч нэг эх олонлогоос утгаа авах ба ажиглалтууд хоорондоо үл хамаарах, мөн санамсаргүй алдаанаас хамаардаггүй байг. $a_{ij} = \mathrm{E}(x_{ti}x_{tj})$, $i, j = 1, \dots, k$ гэж тэмдэглэе. (эдгээр тоонууд t дугаараас хамаарахгүй, учир нь $\boldsymbol{X}$ матрицын мөрүүд нэгэн ижил тархалттай). $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ байг. Иймд их тооны хууль ёсоор $\boldsymbol{p}\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}$. Хэрэв мөрүүдийн тархалт R^k огторгуйн ямар нэг гипер-хавтгай дээр төвлөрөхгүй бол $\boldsymbol{A}$ матриц эерэг тодорхойлогдоно. Үүнчлэн, $\boldsymbol{X}$ ба $\boldsymbol{\varepsilon}$ хамааралгүй тул $\boldsymbol{p}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \mathrm{E}(x_{ti}\varepsilon_t) = 0$. $\boldsymbol{X}$ ба $\boldsymbol{\varepsilon}$ корреляц хамааралтай үед (5.2) илэрхийллээс ХБК-үнэлэлт хазайлттай, зохимжтой биш гэж мөрдөхийг тэмдэглэе.

Санамж 5.1.1. 1), 2), 3) хязгаарлалтуудын хүрээнд ХБК-үнэлэлт зохимжтой байх хүрэлцээтэй нөхцөл бол $\boldsymbol{A}$ матрицын тухай 4) нөхцөл юм. Учир нь (5.1) ёсоор $n \to \infty$ үед

$$\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2\mathrm{E}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) = \frac{1}{n}\sigma^2\mathrm{E}\left(\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\right) \to \mathbf{0}.$$

Иймд $\boldsymbol{p}\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$.

Дараах дүгнэлтүүдийг хийж болно:

1. Хэрэв регрессийн загварын тайлбарлагч хувьсагчид санамсаргүй бөгөөд 1)–3) нөхцөл биелж байвал ХБК-үнэлэлт ба түүнтэй холбоотой статистикууд нөхцөлт ч, нөхцөлт бус ч хазайлтгүй байна.

2. Гаусс-Марковын теоремийн нөхцөлт хувилбар биелнэ.

3. 4), 5) нөхцөлүүд биелэх үед ХБК-үнэлэлт зохимжтой. Тухайн тохиолдолд тайлбарлагч хувьсагчдын ажиглалтын утгууд нэг эх олонлогоос авагдах ба алдаанууд хамааралгүй, ижил тархалттай, регрессоруудаас үл хамаарах үед ч зохимжтой.

4. Хэрэв регрессорууд загварын алдаатай корреляц хамааралтай байвал ХБК-үнэлэлт ерөнхий тохиолдолд хазайлттай, зохимжтой биш юм.

5.2 Хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн арга

Сонгодог регрессийн загварт тавигдах нэг шаардлага бол санамсаргүй алдаанууд хоорондоо корреляц хамааралгүй бөгөөд тогтмол дисперстэй байх явдал билээ. Ажиглалт хийж буй объектууд хангалттай нэгэн төрлийн, хоорондоо эрс ялгарахгүй үед ийм шаардлага тавьж болох юм. Гэвч олон тохиолдолд энэ нь бодитой биш. Жишээ нь өрхүүдийн хүнсний зардлыг нийт орлогоос нь хамааруулан судлахад, өндөр орлоготой өрхийн зардал хэт их байдаг. Энэ нь хамааран хувьсагчдын буюу санамсаргүй алдааны дисперс тогтмол биш гэдгийг харуулж байна. Ийм үзэгдлийг эконометрикт алдааны гетероскедастик гэж нэрлэдэг. Үүнээс гадна, хугацааны цувааны шинжилгээнд маш цөөн тохиолдолд ажиглалт хугацаатай корреляц хамааралгүй гэж тооцдог. Судалж буй хэмжигдэхүүний хугацааны тухайн агшин дахь утга хугацааны өнгөрсөн агшинд байсан түүний утгатай статистик хамааралтай бол алдаануудын хооронд корреляц хамаарал байгааг илэрхийлнэ. Иймд $\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2 \boldsymbol{I}$ нөхцлөөр хязгаарлагдаагүй регрессийн загварыг судлах шаардлагатай юм.

Энэ хэсэгт регрессийн өргөтгөсөн загвар гэж нэрлэгдэх

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.3}$$

загварыг авч үзнэ. Үүнд, $\boldsymbol{y}$–хамааран хувьсагчдын $n \times 1$ вектор, $\boldsymbol{X}$–үл хамаарах хувьсагчдын $n \times k$ хэмжээст матриц, $\boldsymbol{\beta}$–үл мэдэгдэх параметрүүдийн $n \times 1$ вектор, $\boldsymbol{\varepsilon}$–санамсаргүй алдааны $n \times 1$ вектор. Мөн

1) $\boldsymbol{X}$ матриц санамсаргүй биш, ранг нь гүйцэд,

2)$\mathrm{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}$,

3) $\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$–эерэг тодорхойлогдсон матриц байг. Өөрөөр хэлбэл өргөтгөсөн загвар сонгодог загвараас 3) нөхцлөөр ялгагдана.

1. *Хамгийн бага квадратын арга.* (5.3) системд хамгийн бага квадратын аргыг хэрэглэж болно. Тэгвэл $\boldsymbol{\beta}$ векторын ХБК-үнэлэлт нь $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$, регрессийн үлдэгдлийн вектор $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')\boldsymbol{y}$. Иймд

$$\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta}$$

буюу $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ хазайлтгүй,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathrm{V}(\boldsymbol{y}\boldsymbol{X})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}, \\
\mathrm{E}(\boldsymbol{e}) &= \boldsymbol{M}\mathrm{E}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}, \quad \mathrm{V}(\boldsymbol{e}) = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{M}.
\end{aligned}$$

Үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэрийн хувьд математик дундаж нь ((3.13)–ыг үз)

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{M}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{\Omega}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega}).$$

Учир нь $\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{M}$ ба $\boldsymbol{M}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ билээ. Эндээс,

$$\mathrm{E}(\sigma^2) = \mathrm{E}\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{n-k} = \frac{\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega})}{n-k}.$$

Хэрэв ингэж, ковариацийн $\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ матрицын үнэлэлтийн оронд $\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \widehat{\sigma}^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ гэсэн стандарт үнэлэлтийг авбал $\mathrm{E}(\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})) = (1/(n-k))\mathrm{tr}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Omega})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ болж ерөнхий тохиолдолд $\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})$ матрицтай үл давхцана. Иймд $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ векторын ковариацийн матрицын үнэлэлт ердийн хамгийн бага квадратын арга ашиглаж буй үед хазайлттай байна.

Өмнөх § 5.1 зүйлд хийсний адилаар стохастик $\boldsymbol{X}$ регрессоруудын хувьд төстэй үр дүнг гарган авч болно. Тухайлбал,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{E}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) \\
&= \frac{1}{n}\mathrm{E}\left(\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X})\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\right).
\end{aligned}$$

Эндээс, $n \to \infty$ үед $(1/n)\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ ба $(1/n)\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}$ матрицууд эерэг тодорхойлогдсон ямар нэгэн матрицруу тэмүүлэх бол $\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \to \boldsymbol{0}$ байна. Өөрөөр хэлбэл $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ зохимжтой үнэлэлт болно. Гэвч сонгодог загвараас ялгаатай нь, энэ үнэлэлт Гаусс-Марковын теоремийн утгаар оновчтой байж чадахгүй. Эрчимтэй үнэлэлт гарган авахын тулд *хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргыг* ашигладаг.

2. *Хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн арга.* (5.3) загварын $\boldsymbol{\beta}$ векторын хазайлтгүй, эрчимтэй үнэлэлтийн тухай асуулдалд дараах теорем хариулт өгнө.

Теорем 5.2.1 (Айткен). *Регрессийн өргөтгөсөн загварын хувьд $\boldsymbol{\beta}$ векторын хазайлтгүй шугаман үнэлэлтүүдийн ангид*

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^* = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{5.4}$$

нь хамгийн бага ковариацийн матрицтай байна.

$\mathrm{V}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\Omega}$ тул (5.4) тэнцэтгэлээс

$$\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*) = \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X} \tag{5.5}$$

байх нь мөрдөнө.

Цаашид $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^*$ үнэлэлтийг $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$ (GLS, *Generalized Least Squares*) гэж тэмдэглэнэ. Хэрэв $\boldsymbol{\Omega} = \sigma^2\boldsymbol{I}$ бол сонгодог регрессийн загвар болж хувирах бөгөөд $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ болохыг хялбархан шалгаж болно. " Хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн арга" хэмээх нэр томъёог хэрэглэх болсон нь Айткены теоремын баталгааны явцад хазайлтын квадратуудын "өргөтгөсөн" нийлбэр $\boldsymbol{e}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{e}$–ийг минимумчлах шаардлага гардагтай холбоотой юм.

Хэрэв алдааны $\boldsymbol{\varepsilon}$ вектор олон хэмжээст нормал тархалттай байвал хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргын тусламжтай олсон $\boldsymbol{\beta}$ векторын үнэлэлт хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар олсон үнэлэлттэй давхцахыг шалгаж болно ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{ML}}$).

Регрессийн өргөтгөсөн загварын хувьд детерминацийн коэффициент

$$R^2 = 1 - \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}})}{\sum(y_t - \overline{y})^2}$$

нь чанарын хангалттай хэмжүүр болж чаддаггүйгээрээ сонгодог загвараас ялгагдана. Ерөнхий тохиолдолд энэ утга $[0, 1]$ хэрчимд харъялагдах албагүй төдийгүй үл хамаарах хувьсагчдыг нэмэх, хасахад утга нь ихсэх эсвэл багасах албагүй.

Эцэст нь тэмдэглэн хэлэхэд, хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргыг хэрэглэхийн тулд $\boldsymbol{\Omega}$ матриц мэдэгдэж байх ёстой. Гэвч энэ нь практикт тун ховор. Иймд, ямар нэгэн хэлбэрээр $\boldsymbol{\Omega}$ матрицыг үнэлэх, уг үнэлэлтийг (5.4) томъёоны $\boldsymbol{\Omega}$ матрицын оронд тавих асуудал гарах нь зүйн хэрэг. Энэ хандлага хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй өргөтгөсөн аргад хүргэх бөгөөд Бүлэг 7–д энэ талаар тодорхой хэмжээгээр дурьдах болно. Ерөнхий тохиолдолд $\boldsymbol{\Omega}$ матриц $n(n+1)/2$ тооны үл мэдэгдэх параметрийг агуулах тул n ажиглалтын тусламжтай "сайн" үнэлэлт гаргаж авах найдваргүй юм. Иймд учраас хангалттай үр дүнд хүрэхийн тулд $\boldsymbol{\Omega}$ матрицын бүтцэд нэмэлт нөхцөл оруулах шаардлагатай болдог.

Дүгнэлт:

1. Регрессийн өргөтгөсөн загварын хувьд $\boldsymbol{\beta}$ векторын ХБК-үнэлэлт $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ хазайлтгүй, зохимжтой үнэлэлт болох хэдий ч сонгодог тохиолдлоос ялгаатай нь эрчимтэй биш (ковариацийн матрицын минимум утгаар),

2. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ векторын ковариацийн матрицын үнэлэлт хазайлтгүй,

3. Хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргаар олдсон (5.4) үнэлэлт нь хазайлтгүй шугаман үнэлэлтийн ангид эрчимтэй,

4. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$–ХБКӨ-үнэлэлтийг олоход алдааны векторын ковариацийн матриц $\boldsymbol{\Omega}$ өгөгдсөн байх шаардлагатай,

5. Алдааны вектор нормал тархалттай бол ХБКӨ-үнэлэлт хамгийн их үнэний хувь бүхий аргын үнэлэлттэй давхцана,

6. Хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргын үед детерминацийн коэффициент нь чанарын хангалттай хэмжүүр болж эс чадна.

5.3 Бататгах дасгал, бодлого.

Бодлого 5.1. (5.4) үнэлэлт хазайлтгүй гэдгийг шалга.

Бодолт. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$ үнэлэлт хазайлтгүй болохыг шалгахдаа түүний математик дунджийг бодно:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}) &= \mathrm{E}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathrm{E}(\boldsymbol{y})\\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}.
\end{aligned}$$

Бодлого 5.2. (5.5) тэнцэтгэлийг шалга.

Бодолт. $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ байх ба

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}) &= \mathrm{V}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{A}\mathrm{V}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{A}'\\
&= [(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}]\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}]\\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\\
&= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}.
\end{aligned}$$

Бодлого 5.3. $\mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}) = \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}})$ болохыг батал.

Бодолт. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}$ болохыг саная. Хэрэв

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1},\\
\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'
\end{aligned}$$

гэсэн тэмдэглэгээ оруулбал:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}, \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}) &= \mathrm{Cov}(\boldsymbol{By}, \boldsymbol{Ay}) = \boldsymbol{B}\mathrm{V}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{A}' \\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} \\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} = \mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}).\end{aligned}$$

Бодлого 5.4. § 3.2–т өгүүлсэн ёсоор сонгодог регрессийн загварт $\mathrm{Cov}(\widehat{y}_t, e_t) = 0$, $t = 1, \dots, n$ байдаг. Энд, $\widehat{\boldsymbol{y}} = (\widehat{y}_1, \dots, \widehat{y}_n)' = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$ нь $\boldsymbol{y}$–ийн прогнозын утга, регрессийн үлдэгдлийн вектор $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)' = \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}$. Энэ чанар регрессийн өргөтгөсөн загварт хадгалагдан үлдэх үү? Өөрөөр хэлбэл, $\mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}$ байх уу? Үүнд, $\widehat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$ ба $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}$.

Бодолт. Сонгодог регрессийн хувьд

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$$

байдаг. Иймд

$$\widehat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{e} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})\boldsymbol{y}.$$

Үүнд, $\boldsymbol{N}$ нь регрессоруудаар төрөгдөх шугаман хулагад ортогонал проекцлогч операторын матриц. Тэгвэл

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{e}) &= \mathrm{Cov}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{y}, (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N})\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{N}\mathrm{Cov}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}) \\ &= \boldsymbol{N}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}).\end{aligned}$$

Сонгодог регрессийн загварт $\boldsymbol{\Omega} = \sigma^2\boldsymbol{I}$ тул $\boldsymbol{N}^2 = \boldsymbol{N}$ гэдгээс $\mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}$ тэнцэтгэл мөрднө.

Ерөнхий тохиолдолд, регрессийн өргөтгөсөн загварын хувьд $\mathrm{Cov}(\widehat{\boldsymbol{y}}, \boldsymbol{e}) = \boldsymbol{0}$ нөхцөл биелэх албагүй. Үүнийг хялбар жишээгээр харуулъя:

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \text{ гэвэл } \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{N}\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{N}) = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Бодлого 5.5. Дараах регрессийн тэгшитгэлийг авч үзье:

$$y_t = \beta + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n.$$

Регрессийн алдаа

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t) = 0; \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0,\ t \neq s; \quad \mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma^2 x_t,\ x_t > 0$$

нөхцөлүүдийн хангах бол

а) Хамгийн бага квадратын аргаар $\widehat{\beta}$ үнэлэлт ба түүний дисперсийг ол.

б) Хамгийн бага квадратын аргаар олсон үнэлэлтээс бага дисперстэй, ямар нэг хазайлтгүй үнэлэлтийг ол. Энэ үнэлэлтийн дисперсийг бодож, хамгийн бага квадратын аргаар олсон үнэлэлтийн дисперстэй харьцуул.

Бодолт. а) Бодлого 2.5–оос

$$\widehat{\beta}_{\text{OLS}} = \widehat{\beta} = \overline{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \cdots + y_n)$$

болохыг бид мэднэ. Нөхцөл ёсоор $\mathrm{E}(y_t) = \beta$, $\mathrm{V}(y_t) = \sigma^2 x_t$, $\mathrm{Cov}(y_t, y_s) = 0$, $t \neq s$. Иймд

$$\mathrm{E}(\widehat{\beta}) = \beta$$

(өөрөөр хэлбэл $\widehat{\beta}$ үнэлэлт хазайлтгүй),

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{t=1}^{n} x_t.$$

б) Хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн арга нь энэ тохиолдолд $1/\sqrt{x_t}$ жин бүхий хамгийн бага квадратын жигнэсэн аргатай давхцана:

$$\frac{y_t}{\sqrt{x_t}} = \beta \frac{1}{\sqrt{x_t}} + \frac{\varepsilon_t}{\sqrt{x_t}}.$$

Үүнд, $u_t = \varepsilon_t \sqrt{x_t}$ алдаа гомоскедастик нөхцлийг хангана $\mathrm{V}(u_t) = \sigma^2$. Энэ тэгшитгэлд хамгийн бага квадратын арга хэрэглэвэл

$$\widehat{\beta}_{\text{GLS}} = \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{y_t}{x_t} \right) \Bigg/ \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t} \right)$$

$$\mathrm{V}(\widehat{\beta}_{\text{GLS}}) = \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{\sigma^2 x_t}{x_t^2} \right) \Bigg/ \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t} \right)^2 = \sigma^2 \Bigg/ \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t} \right).$$

$\mathrm{V}(\widehat{\beta}) \geq \mathrm{V}(\widehat{\beta}_{\text{GLS}})$ нь

$$\left(\sum_{t=1}^{n} x_t \right) \left(\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{x_t} \right) \geq n^2$$

тэнцэтгэл биштэй эквивалент бөгөөд сүүлийнх нь Коши-Буняковскийн тэнцэтгэл бишээс шууд мөрднө.

Бодлого 5.6. $2n$ ажиглалт нь тус бүртээ n ажиглалт бүхий хоёр тэнцүү хэсэгт хуваагдсан дараах регрессийн загварыг авч үзье:

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{0}; \quad \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0,\ t \neq s;$$
$$\mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma_1^2,\ t = 1, \ldots, n; \quad \mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma_2^2,\ t = n+1, \ldots, 2n.$$

Матрицуудыг блок болгон хуваая:

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{bmatrix}$$

Энд, $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ ба $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ нь $n \times 1$ вектор, $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$ нь $n \times k$ матрицууд юм.

а) $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1$, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2$ ба $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ нь харгалзан эхний n, дараагийн n, нийт $2n$ ажиглалтаар гарган авсан, $\boldsymbol{\beta}$ векторын ХБК-үнэлэлтүүд болог. Тэгвэл $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ үнэлэлт $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1$ ба $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2$ үнэлэлтүүдийн "жигнэсэн дундаж" буюу $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{L}_1\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \boldsymbol{L}_2\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2$ хэлбэртэй болохыг харуул. Үүнд, $\boldsymbol{L}_1$ ба $\boldsymbol{L}_2$ нь $\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{I}_k$ байх $k \times k$ хэмжээст матрицууд.

б) Хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргын хувьд

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} = \left(\frac{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2}{\sigma_2^2}\right)^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2}{\sigma_2^2}\right),$$
$$\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}) = \left(\frac{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2}{\sigma_2^2}\right)^{-1}$$

томъёонуудыг батал.

в) $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$ үнэлэлт нь $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1$ ба $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2$ үнэлэлтийн "жигнэсэн дундаж" буюу $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} = \boldsymbol{\Lambda}_1\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_2\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2$, $\boldsymbol{\Lambda}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_1 = \boldsymbol{I}_k$ байх $\boldsymbol{\Lambda}_1$ ба $\boldsymbol{\Lambda}_2$ гэсэн $k \times k$ хэмжээст матрицууд олдоно гэдгийг үзүүл

Бодолт. а) Хамгийн бага квадратын арга ба блок матрицын чанар ашиглавал

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 &= (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1,\\
\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 &= (\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2,\\
\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1' & \boldsymbol{X}_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1\\ \boldsymbol{X}_2\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}_1' & \boldsymbol{X}_2'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_1\\ \boldsymbol{y}_2\end{bmatrix}\\
&= (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2).
\end{aligned}$$

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i$ үнэлэлтийг олох томъёоноос $\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{X}_i\widehat{\boldsymbol{\beta}}_i$, $i = 1, 2$ байх ба өмнөх тэгшитгэлд орлуулбал

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}(\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2) = \boldsymbol{L}_1\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \boldsymbol{L}_2\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2,$$

энд,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_1 &= (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1,\\
\boldsymbol{L}_2 &= (\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2)^{-1}\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2.
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{I}$ тэнцэтгэл илэрхий.

б) $\boldsymbol{\varepsilon}$ алдааны векторын ковариацийн матриц $\boldsymbol{\Omega}$ байг. Тэгвэл

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix}\sigma_1^2\boldsymbol{I}_n & 0\\ 0 & \sigma_2^2\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2}\boldsymbol{I}_n & 0\\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2}\boldsymbol{I}_n\end{bmatrix}.$$

(5.4) томъёо ёсоор хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргаар олсон үнэлэлт:

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y} \\
&= \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1' & \boldsymbol{X}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2}\boldsymbol{I}_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2}\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \boldsymbol{X}_2 \end{bmatrix} \right)^{-1} \\
&\quad \times \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1' & \boldsymbol{X}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2}\boldsymbol{I}_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2}\boldsymbol{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \left(\frac{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{y}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{y}_2}{\sigma_2^2} \right).
\end{aligned}$$

Цаашилбал, (5.5) томъёог ашиглавал

$$\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} = \left(\frac{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1}.$$

в) Бодолтын а)–д хийсний адилаар

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} = \boldsymbol{\Lambda}_1\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_2\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2$$

болохыг хялбархан харуулж болно. Үүнд,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Lambda}_1 &= \left(\frac{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \frac{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1}{\sigma_1^2}, \\
\boldsymbol{\Lambda}_2 &= \left(\frac{\boldsymbol{X}_1'\boldsymbol{X}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2}{\sigma_2^2} \right)^{-1} \frac{\boldsymbol{X}_2'\boldsymbol{X}_2}{\sigma_2^2}.
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\Lambda}_1 + \boldsymbol{\Lambda}_2 = \boldsymbol{I}_k$ тэнцэтгэл илэрхий.

Бүлэг 6

Гетероскедастик шинж, хугацааны корреляц

Энэ бүлэгт регрессийн өргөтгөсөн загварын хоёр чухал ангийг авч үзнэ. Эхлээд гетероскедастик шинжтэй загварын тухай ярих болно. Алдааны векторын ковариацийн матриц диагонал хэлбэртэй боловч гол диагоналийн элементүүд нь хоорондоо ялгаатай тохиолдолд энэ нэр томъёог хэрэглэнэ. Өөрөөр хэлбэл, өөр өөр туршилтын алдаанууд корреляцгүй боловч дисперсүүд нь ялгаатай гэсэн үг. Хоёр дахь нь, өгөгдөл хугацааны цувааны шинж чанарыг агуулсан байх анги юм. Өөрөөр хэлбэл, хугацааны ялгаатай агшин дахь туршилтууд статистик хамааралтай байж болдог. Энэ нь өөр өөр туршилтын (хугацааны ялгаатай агшинд хийгдсэн) алдаанууд корреляц хамааралтай бөгөөд алдааны векторын ковариацийн матриц диагонал биш байж болно гэсэн үг юм. Эдгээр загварын үл мэдэгдэх параметрүүдийг үнэлэхдээ Бүлэг 5–д авч үзсэн хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргыг хэрэглэнэ. Гэтэл алдааны векторын ковариацийн матриц $\boldsymbol{\Omega}$–г тэр бүр мэдэх боломжгүйг дурдсан билээ. Иймээс энэ бүлэгт онолын асуудлуудаас гадна хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргыг практикт хэрэглэх зарим тохиолдлуудыг хөндөнө.

6.1 Гетероскедастик шинж

Энэ хэсэгт регрессийн өргөтгөсөн загварын тухайн тохиолдол болох гетероскедастик шинж бүхий загварыг авч үзнэ. Гетероскедастиктай гэдэг нь алдаанууд корреляц хамааралгүй, тогтмол биш дисперстэй гэсэн үг (сонгодог загварт тогтмол дисперстэй гэж үздэг бөгөөд тэр тохиолдолд гомоскедастиктай гэж нэрлэдэг билээ). Өмнө үзсэнээр, хэрэв судалж буй обьектууд нэгэн төрлийн биш тохиолдолд гетероскедастик шинж илэрнэ. Жишээбэл, хэрэв үйлдвэрийн ашгийг үндсэн фондын хэмжээнээс хамааруулан авч үзвэл том үйлдвэрүүдийн ашгийн хэлбэлзэл жижиг үйлдвэрүүдийг бодвол их байх нь илэрхий.

6.1.1 Хамгийн бага квадратын жигнэсэн арга

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.1}$$

загварын хувьд $\boldsymbol{\varepsilon}$ алдааны векторын ковариацийн матриц $\boldsymbol{\Omega}$ нь диагонал матриц бөгөөд $\mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2,\ t = 1, \dots, n$ байдаг гэе. Зарим тохиолдолд $\sigma_t^2 = \sigma^2\omega_t$ гэж авч үзэх нь тохиромжтой байдаг. Үүнд, ω_t нормчлогч үржигдэхүүн бөгөөд $\sum\limits_{t=1}^{n} \omega_t = n$ байна. $\omega_t = 1,\ t = 1, \dots, n$ бол сонгодог загварт шилжинэ.

(6.1) системийн тэгшитгэл бүрийг σ_t–д хуваaж тэгшитгэл бүрээр бичвэл:

$$\frac{y_t}{\sigma_t} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \frac{x_{tj}}{\sigma_t} + u_t, \quad t = 1, \dots, n \tag{6.2}$$

Үүнд, $u_t = \varepsilon_t/\sigma_t$, $\mathrm{V}(u_t) = 1$, $t \neq s$ үед $\mathrm{Cov}(u_t, u_s) = 0$. (6.2) системд хамгийн бага квадратын стандарт аргыг хэрэглэх боломжтой юм. Өөрөөр хэлбэл дараах нийлбэрийг $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_k)'$ вектороор минимумчилснаар хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргын үнэлэлтийг гарган авч болно.

$$f(\boldsymbol{b}) = \sum_{t=1}^{n} \left(\frac{1}{\sigma_t} \left(y_t - \sum_{j=1}^{k} b_j x_{tj} \right) \right)^2$$

Энэ хувиргалтын ерөнхий санааг ойлгох нь тийм ч хэцүү биш. Хамгийн бага квадратын стандарт аргыг ашиглан хазайлтуудын квадратын нийлбэрийг минимумчилъя.

$$\varphi(\boldsymbol{b}) = \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \sum_{j=1}^{k} b_j x_{tj} \right)^2$$

Нийлбэрийн нэмэгдэхүүн бүр ялгаатай дисперстэй учир нийлбэрт ялгаатай статистик нөлөө үзүүлнэ. Эцсийн дүндээ ХБК–ын үнэлэлт эрчимтэй биш болно. Ажиглалт бүрийг $1/\sigma_t$ коэффициентийн тусламжтай "жигнэснээр" нэгэн төрлийн биш байдлыг арилгаж байгаа юм. Иймээс гетероскедастиктай загварыг үнэлэх хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргыг *хамгийн бага квадратын жигнэсэн арга* гэнэ. ХБК–ын жигнэсэн аргыг хэрэглэх нь ХБК–ын стандарт аргаар олсон үнэлэлтүүдийн дисперсийг багасгадаг болохыг шалгаж болно.

6.1.2 Гетероскедастик тохиолдлыг засах

Хэрэв σ_t үл мэдэгдэх (практикт ийм байдаг) бол хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн аргыг ашиглах шаардлагатай болдог. Нэмэлт нөхцөл гэдэг нь σ_t^2 дисперсийг (өөрөөр хэлбэл ковариацийн матриц $\boldsymbol{\Omega}$–г) тодорхой хэлбэрээр таамаглахыг хэлж буй юм. Эдгээр параметрийн тоо n учраас $\boldsymbol{\Omega}$ матрицын бүтцэнд нэмэлт хязгаарлал тавихгүйгээр, дисперсийн зөвшөөрч болохуйц үнэлэлт гарган авна гэдэгт итгэхэд бэрх. Бид хэд хэдэн төрлийн гетероскедастиктай загварыг доор авч үзнэ. Тэдгээрт $\boldsymbol{\Omega}$ матрицын бүтцийг тодорхой хэлбэрээр таамагласнаар (бүтцэнд нэмэлт хязгаарлал тавьснаар) түүний үнэлэлтийг байгуулах боломжтой болсон төдийгүй хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн аргаар үл мэдэгдэх параметрүүдийн $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{FGLS}}$ үнэлэлтийг байгуулж болохыг үзүүлсэн.

1. *Алдааны стандарт хазайлт үл хамаарах хувьсагчтайгаа пропорционал байх.* Зарим тохиолдолд алдааны стандарт хазайлт аль нэг үл хамааран хувьсагчтай шууд пропорциональ хамааралтай гэж таамагладаг. Жишээ нь $x_k : \sigma_t^2 = \sigma^2 x_{tk}^2$

гэе. t–р тэгшитгэлийг x_{tk} $(t=1,\ldots,n)$–д хувааж шинэ $x^*_{tj}=x_{tj}/x_{tk}$, $y^*_t=y_t/x_{tk}$ $(t=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,k)$ хувьсагчдыг оруулснаар сонгодог регрессийн загварыг гарган авна. Энэ загварын коэффициентуудын үнэлэлт анхны загварын үнэлэлтүүдийг шууд өгнө. Хэрэв $\boldsymbol{X}$ матриц дахь 1–р регрессор нь нэгжийн багана бол шинэ загварын сул гишүүн ба $x^*_{t1}=1/x_{tk}$ хувьсагчийн өмнөх коэффициентийн үнэлэлтүүд харгалзан, анхны загварын x_{tk} хувьсагчийн коэффициент болон сул гишүүний үнэлэлт болно гэдгийг сануулъя.

Энэ аргыг ямар тохиолдолд ашиглаж болох вэ гэсэн зүй ёсны асуулт гарна. Гетероскедастик шинж байгаа эсэхийг илрүүлэх практикт түгээмэл хэрэглэгддэг аргуудыг авч үзье. Хэрэв алдаанууд аль нэг үл хамааран хувьсагчаас хамааралтай гэж таамаглаж байгаа бол түүврийг уг хувьсагчийн утгуудын өсөх эрэмбээр эрэмбэлээд дараа нь хамгийн бага квадратын стандарт аргаар регрессийн параметрүүдийг үнэлж, улмаар үлдэгдлүүдийг гарган авна. Ингэхэд үлдэгдлүүдийн стандарт хазайлт (хэлбэлзэл) мөн өсөх эрэмбэтэй байвал анхны таамаглалыг үнэн гэж үзэх үндэслэлтэй. Энэ тохиолдолд, дээр өгүүлсэн хувиргалтыг хийж регресс зохион үлдэгдлүүдийг олно. Ингэж гарган авсан үлдэгдлүүдийн хазайлт ямар нэгэн эрэмбэгүй, эмх цэгцгүй байвал гетероскедастик тохиолдлыг засах процесс амжилттай явагдлаа гэж үзнэ. Мэдээж, регрессийн бусад параметрүүдийг (хазайлтуудын квадратын нийлбэр, үнэлэлтийн нөлөөтэй эсэх г.м.) харьцуулан үзсэнээр аль загвар нь илүү сайн болох тухай эцсийн шийдвэр гаргана.

Жишээ. Москва хот дахь сууцны зах зээл. (Үргэлжлэл-2, Эхлэлийг § 3.5–аас, Үргэлжлэл-1–ийг § 4.2–оос үз)

Энэхүү жишээний өгөгдлийг сайтар судалж үзвэл алдаанууд гомоскедастик байх тухай таамаглал няцаагдахыг харах болно. Энэ нь регрессорууд нөлөөтэй байх тухай Үргэлжлэл–1-д хийсэн дүгнэлтэнд эргэлзээ төрүүлж байна.

Гетероскедастик шинжийг тооцохын тулд үнэлэлтийн хоёр-алхамт процедурыг ашигласан (Two-step estimation, Greene, 1997), ХБК–ын 2 алхамт аргатай холихгүй байхыг сануулъя. Энэ процедур, дисперс нь регрессоруудын нэгтэй пропорционал байх өмнө авч үзсэн байдлын өргөтгөл юм. 2 алхамт процедур хязгаартаа регрессийн коэффициентуудын стандарт алдааны хазайлтгүй үнэлэлтийг өгнө. Алдааны дисперс хэд хэдэн регрессоруудаас шугаман функц байна гэж үзье. Өгөгдсөн тохиолдолд

$$\sigma_i^2 = \beta_0 + \beta_1 LOGLIVSP_i + \beta_2 BRICK_i. \qquad (*)$$

Процедурын эхний алхамд манай загварын регрессийн тэгшитгэлийг үнэлнэ:

$$\begin{aligned} LOGPRICE = & \beta_0 + \beta_1 LOGLIVSP + \beta_2 LOGPLAN + \beta_3 LOGKITSP \\ & + \beta_4 LOGDIST + \beta_5 FLOOR + \beta_6 BRICK + \beta_7 BAL \\ & + \beta_8 LIFT + \beta_9 R1 + \beta_{10} R2 + \beta_{11} R3 + \beta_{12} R4 + \varepsilon \qquad (**) \end{aligned}$$

$*$ тэгшитгэлээс (σ_i–ийн оронд $**$ регрессийн e_i үлдэгдлүүдийг тавина) дисперсийн векторын зохимжтой үнэлэлт $\widehat{\sigma}_i^2$–ыг олно.

Хоёрдугаар алхамд $\widehat{\sigma}_i$ үнэлэлтүүдийг ХБК–ын жигнэсэн аргын жингийн коэффициентууд болгон ашиглана (i–р тэгшитгэлийг $\widehat{\sigma}_i$–д хуваана). Хүснэгт 6.1–д 2 алхамт процедурын үр дүнг үзүүлэв. Хүснэгт 6.1–ийг Хүснэгт 3.1–тэй харьцуулбал, үнэлэлтэнд онцгой өөрчлөлт бараг ороогүй байна. Сууцны өрөөний тоог илэрхийлсэн идэвхгүй хувьсагчдын өмнөх коэффициентууд хамгийн ихээр өөрчлөгдсөн

Хамаарaн хувьсагч: LOGPRICE

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	6.693	0.251	26.6	0.0000
LOGLIVSP	0.756	0.0536	14.11	0.0000
LOGPLAN	0.438	0.0468	9.36	0.0000
LOGKITSP	0.129	0.0479	2.69	0.0073
LOGDIST	−0.110	0.0135	−8.08	0.0000
BRICK	0.130	0.0198	6.58	0.0000
FLOOR	−0.0658	0.0170	−3.87	0.0001
BAL	0.131	0.0187	7.01	0.0000
LIFT	0.035	0.017	2.05	0.0400
*R*1	0.365	0.0892	4.08	0.0001
*R*2	0.249	0.0639	3.90	0.0001
*R*3	0.257	0.0473	5.43	0.0000
*R*4	0.205	0.0376	5.44	0.0000
R^2 статистик (жигнээгүй): 0.891				

Хүснэгт 6.1:

байна. $R1$ ба $R2$ хувьсагчдын өмнөх коэффициент нөлөөтэй гарсан нь өмнөх үр дүнгээс зөрж байна. Сууцны талбайн үнээр тооцсон мэдрэмжийн үнэлэлт өмнө нь 0.67 байснаа 0.76 болсон нь нилээд их өөрчлөлт юм. Гарган авсан үр дүндээ тулгуурлан "$R2$, $R3$, $R4$–ийн коэффициентууд тэнцүү" байх тухай болон "$R1$, $R2$–ын коэффициентууд тэнцүү биш" гэсэн статистик таамаглалуудыг шалгая. Ингэхдээ таамаглал шалгах F тест ашиглая:

1) $\mathbf{H}_0 : \beta_{10} = \beta_{11};\ \beta_{11} = \beta_{12}$, F-статистикийн утга 1.548415, P-магадлал 0.213713.

2) $\mathbf{H}_0 : \beta_9 = \beta_{10}$, F-статистикийн утга 10.41677, P-магадлал 0.001340.

Иймд "$R2$, $R3$, $R4$–ийн коэффициентууд тэнцүү" таамаглал урьдын адил няцаагдахгүй байна. Харин "$R1$, $R2$–ын коэффициентууд тэнцүү" гэсэн таамаглал 99.5%–ийн итгэх түвшинд илүү итгэлтэйгээр няцаагдаж байна.

2. *Алдааны дисперс зөвхөн хоёр утга авах тохиолдол.* Регрессийн алдааны дисперсийн хувьд $\sigma_t^2 = \omega_1^2, t = 1, \ldots, n_1$, $\sigma_t^2 = \omega_2^2, t = n_1+1, \ldots, n_1+n_2$, $(n_1+n_2 = n)$ нөхцөл биелдэг байг. Энд ω_1^2, ω_2^2 үл мэдэгдэх тоонууд. Өөрөөр хэлбэл эхний n_1 туршилтын алдааны дисперс нэг ижил утгатай, сүүлийн n_2 туршилтын алдааны дисперс ижил бөгөөд өмнөхөөсөө өөр утгатай байдаг гэе. Энэ тохиолдолд хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн аргын дараах хувилбарыг хэрэглэж болно:

1. (6.1) гэсэн стандарт регрессийг зохиож, алдааны вектор $\boldsymbol{e}$–г олно. Энэ векторыг харгалзан n_1, n_2 хэмжээстэй $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ гэсэн хоёр дэд векторт хуваана.

2. ω_1^2, ω_2^2 дисперсүүдийн үнэлэлт $\widehat{\omega}_1^2 = \boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_1/n_1$, $\widehat{\omega}_2^2 = \boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_2/n_2$–ийг байгуулна.

3. Эхний n_1 тэгшитгэлийг $\widehat{\omega}_1^2$-д, сүүлийн n_2 тэгшитгэлийг $\widehat{\omega}_2^2$-д хувааж хувьсагчдыг хувиргана.

4. Хувиргасан загварын хувьд ердийн регресс зохионо.

Өмнө үзсэнээр ω_1^2, ω_2^2 үнэлэлтүүд хазайлттай боловч зохимжтой гэдгийг харуулж болно.

Энэ аргыг дисперс нь зөвхөн хоёр биш хэд хэдэн утга авах үед өргөтгөн ашиглаж болно.

3. *Дисперсийн зохимжтой үнэлэлт.* Гетероскедастиктай (6.1) загварын хувьд $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн үнэлэлтийг хамгийн бага квадратын стандарт аргаар байгуулсан гэе. Тэгвэл Бүлэг 5–д үзсэнээр энэ үнэлэлт хазайлтгүй бөгөөд зохимжтой, харин түүний ковариацийн матрицын ((3.16)–г үз) стандарт үнэлэлт $\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}) = \widehat{\sigma}^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}$ нь хазайлттай бөгөөд зохимжтой биш байдаг. Гэвч компьютерийн багц программуудад регрессийн коэффициентуудын стандарт алдааг энэ томъёогоор боддог. Гетероскедастик тохиолдлыг засаж болох уу? ковариацийн матрицын үнэлэлтийг сайжруулж болох уу? гэсэн асуулт гарна. Энэ асуултанд дараах хоёр арга эерэг хариу өгнө.

Стандарт алдааны Уайтын хэлбэр (White). Алдааны вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$–ны ковариацийн матриц $\boldsymbol{\Omega}$ диагонал хэлбэртэй бөгөөд $\mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma_t^2$, $t = 1, \ldots, n$ гэе. Тэгвэл $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$ тул

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{E}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \\ &= n(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}\right)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}$ матрицыг авч үзье. Элементчилэн бичвэл $(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X})_{ij} = \sum_{s=1}^{n} x_{si}\sigma_s^2 x_{sj}$. Үүнд, $\boldsymbol{x}_s'$, $s = 1, \ldots, n$, нь регрессоруудын матриц $\boldsymbol{X}$-ийн $1 \times k$ хэмжээст мөр векторууд Тэгвэл

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X} = \sum_{s=1}^{n} \sigma_s^2 \boldsymbol{x}_s \boldsymbol{x}_s'.$$

Регрессийн коэффициентуудын ковариацийн матрицын үнэлэлт

$$\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = n(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} e_s^2 \boldsymbol{x}_s\boldsymbol{x}_s'\right)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \tag{6.3}$$

зохимжтой болохыг 1980 онд Уайт харуулжээ.

(6.3) томъёогоор бодогдох стандарт хазайлтыг стандарт алдааны Уайтын хэлбэр (*White standard errors*), эсвэл *гетероскедастиктой үеийн зохимжтой стандарт алдаа* (*Heteroscedasticity Consistent standard errors*) гэж нэрлэнэ.

Стандарт алдааны Невье-Вестийн хэлбэр (Newey-West). Алдааны ковариацийн матриц $\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Omega} = (\omega_{ij})$ нь гол диагонал төдийгүй, гол диагоналаас L–ээс хэтрэхгүй зайнд орших хөрш диагоналууд дээрээ тэгээс ялгаатай элемент агуулдаг гэе. ($\omega_{ij} = 0$, $|i - j| > L$). Энэ үед

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = n(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}&\left(\frac{1}{n}\sum_{s=1}^{n} e_s^2\boldsymbol{x}_s\boldsymbol{x}_s'\right. \\ &\left.+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{L}\sum_{t=j+1}^{n}\omega_j e_t e_{t-j}(\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_{t-j}' + \boldsymbol{x}_{t-j}\boldsymbol{x}_t')\right)(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\end{aligned} \tag{6.4}$$

үнэлэлт зохимжтой болохыг 1987 онд Невье, Вест нар баталжээ.

Энэ томъёонд байгаа жингийн коэффициент ω_j–г сонгох хэд хэдэн арга байдаг.

1. Хамгийн энгийн тохиолдолд $\omega_j = 1$ гэж үздэг. Энэ үед (6.4) томъёогоор олдох матриц сөрөг биш тодорхойлогдсон байна.

2. $\omega_j = 1 - \dfrac{j}{L+1}$ (Бартлетт).

3. $\omega_j = \begin{cases} 1 - 6\left(\frac{j}{L+1}\right)^2 + 6\left(\frac{j}{L+1}\right)^3, & 1 \leq j \leq \frac{L+1}{2}, \\ 2\left(1 - \frac{j}{L+1}\right)^2, & \frac{L+1}{2} < j \leq L \end{cases}$ (Парзен).

Ихэнх тохиолдолд Парзены жинг ашиглах нь илүү зохимжтой.

(6.4) томъёогоор бодогдох стандарт хазайлтуудыг стандарт алдааны Невье-Вестийн хэлбэр (*Newey-West standart errors*), эсвэл *гетероскедастик ба автокорреляцийг тооцсон зохимжтой стандарт алдаа* (*Heteroscedasticity and Autocorrelation Consistent standard errors*) гэж нэрлэнэ.

Жишээ. Эрсдэлийн шагнал. (*Peresetsky, de Roon, 1997*)

S_t –t дэх өдрийн долларын ханш (руб/долл),

$F_t^{(n)}$ –n өдрийн дараа нийлүүлэхээр хийсэн фьючерсийн гэрээний t дэх өдрийн үнэ тус тус байг.

"$F_t^{(n)}$ нь ирээдүйн ханш болох S_{t+n}–ийн хазайлтгүй үнэлэлт болж чадах уу?" гэсэн асуудал сонирхол татна. Өөрөөр хэлбэл,

$$\mathrm{E}(S_{t+n} \mid I_t) = F_t^{(n)}$$

тэнцэтгэл үнэн үү? Үүнд, I_t –t агшин дахь боломжит бүх мэдээллийг агуулсан, мэдээллийн олонлог. $\mathrm{E}(S_{t+n} \mid I_t)$ –нөхцөлт мат.дундаж. Үнэн хэрэг дээрээ эрсдэлээс зайлсхийж буй агентууд зах зээлд оролцож буй учраас энэ тэнцэтгэл биелэх албагүй. Харин фьючерсийн үнэ, хүлээгдэж буй долларын ханшнаас эрсдэлийн шагнал болох $\widehat{\pi}_t^{(n)}$ хэмжигдэхүүнээр ялгагдана:

$$\mathrm{E}(S_{t+n} \mid I_t) = F_t^{(n)}(1 + \widehat{\pi}_t^{(n)}).$$

Хувьсагчдын логарифмыг ашигласан загварт шилжих нь тохиромжтой:

$$\mathrm{E}(s_{t+n} \mid I_t) = f_t^{(n)} + \pi_t^{(n)}.$$

Үүнд, $f_t^{(n)} = \ln F_t^{(n)}$, $s_{t+n} = \ln S_{t+n}$, $\pi_t^{(n)} = \ln(1 + \widehat{\pi}_t^{(n)})$ –эрсдэлийн шагналын дахин тодорхойлолт, (бага $\widehat{\pi}_t^{(n)}$–ийн хувьд $\pi_t^{(n)} \approx \widehat{\pi}_t^{(n)}$).

Үнэлэлтийн хазайлтгүй байх тухай таамаглалыг шалгахын тулд дараах регрессийг авч үзье.

$$s_{t+n} - f_t^{(n)} = (\beta_0 + \beta_1 n) + (\beta_2 + \beta_3 n) f_t^{(n)} + (\beta_4 + \beta_5 n)(f_t^{(n)} - s_t) + \varepsilon_{t+n}^{(n)} \qquad (*)$$

Энэ тэгшитгэлийг үнэлсний үр дүнд хэрэв, дор хаяж нэг β_i коэффициент "0–ээс ялгаатай гарвал, энэ нь эрсдэлийн 0–ээс ялгаатай шагнал байгааг илэрхийлнэ" ((∗) регрессийн бүх регрессорууд мэдээллийн олонлог I_t–д харъяалагдана).

Түүнчлэн, $(*)$ регресс нь эрсдэлийн шагналын түр зуурын бүтцийг илэрхийлнэ:

$$\pi_t^{(n)} = (\beta_0 + \beta_1 n) + (\beta_2 + \beta_3 n) f_t^{(n)} + (\beta_4 + \beta_5 n)(f_t^{(n)} - s_t) \qquad (**)$$

Тухайн үедээ валютын фьючерсийн худалдааны хэмжээгээрээ тэргүүлж байсан Москвагийн Товарын Бирж (МТБ) ба Москвагийн Банк хоорондын Валютын Бирж (ММВБ)–ээс фьючерсийн гэрээ болон долларын ханшны өгөгдлүүдийг авч 1992 оны 11–р сараас 1995 оны 10–р сарын хугацааг хамруулан авч үзжээ. Ажиглалтуудыг n–ийн өсөх чиглэлд эрэмбэлье. n–ийн ижил утгуудыг t–ийн өсөх эрэмбээр эрэмбэлье.

$(*)$ тэгшитгэлийн хувьд гомоскедастик чанар дараах хоёр шалтгааны улмаас зөрчигдөнө:

1) $\varepsilon_{t+n}^{(n)}$, $\varepsilon_{t+n}^{(m)}$ алдаанууд корреляц хамааралтай (нийлүүлэх хугацаа нь өөр өөр байх гэрээнүүдийн нэг өдрийн үнэ),

2) $\varepsilon_{t-1+n}^{(n-1)}, \varepsilon_{t+n}^{(n)}$ алдаанууд корреляцтай (нийлүүлэх хугацаа нь $t+n$ байх гэрээнүүдийн дараалсан өдрүүдийн үнэ).

Гэвч бидний эрэмбэлснээр, бие биеэсээ хүрэлцээтэй хол байгаа ажиглалтуудын хувьд алдаануудыг хамааралгүй гэж үзэж болно. Ийм учраас, $(*)$ тэгшитгэлийг үнэлэхийн тулд коэффициентуудын стандарт хазайлтын ХБК-үнэлэлтийг ашиглаж болохгүй тул Невье-Вестийн хэлбэртэй стандарт алдааг ашиглана.

А. Яковлев, В. Бессонов (1995) нарын ажилд бидний авч үзэж буй үеийг фьючерсийн зах зээлд оролцогчдын тоо, худалдааны хэмжээ зэрэг үзүүлэлтүүдээр нь 3 дэд үед хуваан авч үзжээ. Энэ хуваалтыг үндэслэн $(*)$ тэгшитгэлийг дэд үе бүрт үнэлсэн үр дүнг Хүснэгт 6.2–д үзүүлэв. Невье-Вестийн хэлбэртэй 150 лаг бүхий стандарт алдааг дөрвөлжин хаалтанд бичсэн. Хүснэгт 6.2–оос дараах дүгнэлтийг хийж болно.

Үе	const	n	$(f_t^{(n)} - s_t)$	$(f_t^{(n)} - s_t)n$	$f_t^{(n)}$	$f_t^{(n)} n$
$11.92 - 10.93$	1.54^*	0.016^*	-0.99^{**}	0.0056	-0.22^*	-0.0023^*
	[0.64]	[0.0076]	[0.35]	[0.0031]	[0.091]	[0.0011]
$10.93 - 03.94$	-1.08	0.041^{**}	-1.33^{**}	0.0080^{**}	0.15	-0.0056^{**}
	[0.94]	[0.0035]	[0.25]	[0.00054]	[0.13]	[0.00047]
$03.94 - 10.95$	-0.53	0.035^{**}	-0.69	0.0015	0.060	-0.0041^{**}
	[0.41]	[0.0016]	[0.38]	[0.00088]	[0.052]	[0.00023]

* 95%–ийн итгэх түвшинд 0–ээс ялгагдана.

** 99%–ийн итгэх түвшинд 0–ээс ялгагдана.

Хүснэгт 6.2:

1) $(**)$ тэгшитгэлээр загварчлагдах эрсдэлийн шагнал $\pi_t^{(n)}$ бүх 3 үед тэгээс мэдэгдэхүйц ялгагдана.

2) Эрсдэлийн шагнал үе бүрийн хувьд ялгаатай байна. Үүгээр валютын фьючерсийн зах зээлийн хөгжлийн түүхийг хуваасан А. Яковлев, В. Бессонов нарын хуваалт батлагдаж байна.

6.1.3 Гетероскедастик шинжийг илрүүлэх тест

Энд гетероскедастик шинжийг илрүүлэхэд хамгийн түгээмэл хэрэглэдэг статистик тестүүдийг товч авч үзнэ. Тест бүрийн тодорхойлолтоос тэдгээрийн ач холбогдол тодорно. Эдгээр тестүүдийн хувьд $\mathbf{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_n^2$ гэсэн үндсэн таамаглалыг $\mathbf{H}_1$: "$\mathbf{H}_0$ биш" гэсэн өрсөлдөгч таамаглалын нөхцөлд шалгана.

Уайтын (White) тест. Тестийн агуулга дараах зүйлд оршино. Хэрэв загвар гетероскедастик чанартай бол энэ нь алдааны дисперс регрессоруудаас хамаардагтай холбоотой. Ер нь гетероскедастик шинж анхны загварын ердийн регрессийн үлдэгдлүүдэд тусгалаа олдог. Уайт эдгээр санааг хэрэгжүүлж, (1980) гетероскедастик шинжийн бүтцийн хувьд ямар нэг урьдчилсан нөхцөл тавилгүйгээр $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг тестлэх аргыг санал болгожээ. Эхлээд анхны, (6.1) загварт хамгийн бага квадратын стандарт арга хэрэглэн регрессийн e_t, $t = 1, \ldots, n$ үлдэгдлүүдийг олно. Дараа нь эдгээр үлдэгдлийн квадратууд болох e_t^2–ийг $\boldsymbol{X}$–ийн бүх регрессор, тэдний квадратууд, хоёрлосон үржвэрүүд, мөн сул гишүүнээс (анхны загвар сул гишүүнгүй байсан ч гэсэн) хамааруулан шинэ регресс байгуулна. Тэгвэл $\mathbf{H}_0$ таамаглалын үед nR^2 хэмжигдэхүүн хязгаартаа $\chi^2(N-1)$ тархалттай байна. Энд, R^2 –хоёрдох регрессийн детерминацийн коэффициент, N –хоёрдох регрессийн регрессорын тоо.

Уайтын тест универсал байдлаараа давуутай юм. Гэвч энэ тест $\mathbf{H}_0$ таамаглал няцаагдсан үед гетероскедастик шинжийн функционал хэлбэрийн тухай ямар нэгэн зүйл хэлэхгүй. Зөвхөн стандарт алдааны Уайтын хэлбэр байгаа үед л гетероскедастик тохиолдлыг засах аргыг хэлнэ.

Голдфелд-Куандтын (Goldfeld-Quandt) тест. Энэ тестийг алдааны дисперс ямар нэгэн үл хамааран хувьсагчийн хэмжээнээс шугаман хамааралтай гэсэн урьдчилсан нөхцлийн үед ашиглана. Тестийг дараах алгоритмаар явуулна.

1. Гетероскедастик шинжтэй гэж таамаглаж байгаа үл хамааран хувьсагчийн утгуудын буурах эрэмбээр түүврийг эрэмбэлнэ.

2. Эрэмбэлэгдсэн түүврийн дунд нь орших гишүүдээс d ширхгийг хасна (d тоо дунджаар, нийт түүврийн хэмжээний $1/4$–тэй тэнцүү байна).

3. Эхний болон сүүлчийн $n/2 - d/2$ ширхэг туршилтуудаар хоёр үл хамаарах регресс зохиож, харгалзах $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ үлдэгдлүүдийг бодно.

4. $F = \boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_1/\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_2$ статистикийг байгуулна. Хэрэв $\mathbf{H}_0$ таамаглал үнэн бол F статистик $F(n/2 - d/2 - k; n/2 - d/2 - k)$ тархалттай байна.

Энэ статистик их утгатай байхад $\mathbf{H}_0$ таамаглал няцаагдана. Мөн хасаж байгаа түүврийн тоо хэтэрхий их ч биш, бага ч биш байх шаардлагатай. Ерөнхийдөө ингэж түүвэр хасахгүйгээр тестийг хийж болох боловч энэ үед тестийн чадал буурдаг байна.

Бреуш-Паганы (Breusch-Pagan) тест. Алдааны дисперс σ_t^2 зарим нэмэлт хувьсагчдаас хамаарна гэсэн урьдчилсан таамаг нөхцөлтэй тохиолдолд энэ тестийг ашиглана:

$$\sigma_t^2 = \gamma_0 + \boldsymbol{z}_t'\boldsymbol{\gamma}, \quad t = 1, \ldots, n.$$

Үүнд, $\boldsymbol{z}_t = (z_{t1}, \ldots, z_{tp})'$ –үл хамааран хувьсагчдын вектор, γ_0, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)'$ –үл мэдэгдэх параметрүүд. Бреуш-Паганы тестийг дараах алгоримтаар гүйцэтгэнэ.

1. Стандарт регресс (6.1)–ийн параметрүүдийг үнэлэн үлдэгдэл вектор $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_n)'$–г байгуулна.

2. $\widehat{\sigma}^2 = (1/n)\sum e_t^2$ үнэлэлтийг байгуулна.

3. $e_t^2/\widehat{\sigma}^2 = \gamma_0 + \boldsymbol{z}_t'\boldsymbol{\gamma} + \nu_t$ регрессийг үнэлнэ. Түүний хувьд вариацийн тайлбарлагдах хэсэг RSS–ийг олно.

4. RSS/2 статистикийг байгууна. Хэрэв $\mathbf{H}_0$ таамаглал үнэн бол RSS/2 хэмжигдэхүүн хязгаартаа $\chi^2(p)$ тархалттай байна.

Энэ тестийн тусламжтайгаар гетероскедастик шинжийг илрүүлсэн тохиолдолд $(\widehat{\gamma}_0 + \boldsymbol{z}_t'\widehat{\boldsymbol{\gamma}})^{-1/2}$ хэмжигдэхүүнийг жин болгон сонгон авч хамгийн бага квадратын жигнэсэн аргаар засах оролдлого хийж болдог. Ингэхдээ

Энэ тохиолдолд, зарим t–ийн хувьд $\widehat{\gamma}_0 + \boldsymbol{z}_t'\widehat{\boldsymbol{\gamma}} < 0$ гарч болох юм. Хэрэв ийм туршилтын тоо их биш бол тэдгээрийг орхиж болно. Эсрэг тохиолдолд, гетероскедастик чанарын дараах хэлбэрийг авч үзэж болох бөгөөд хэрэгжүүлэх арга нь дээрх алгоритмтай ижил байна.

$$\sigma_t^2 = e^{\gamma_0 + \boldsymbol{z}_t'\boldsymbol{\gamma}}, \quad t = 1, \dots, n.$$

Үүнээс гадна, гетероскедастик шинжийн дурын $\sigma_t^2 = f(\gamma_0 + \boldsymbol{z}_t'\boldsymbol{\gamma})$ хэлбэрийн хувьд дээрхийн адил гүйцэтгэж болно.

Дүгнэлт:

1. Гетероскедастик шинж байгаа үед хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн арга хэрэглэх нь хазайлтуудын квадратын жигнэсэн нийлбэрийг минимумчлахад хүргэнэ.

2. Ерөнхий тохиолдолд, хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн аргаар n туршилтын тусламжтай n параметрийг үнэлэн, зохимжтой үнэлэлт гарган авах боломжгүй.

3. Зарим тохиолдолд (алдаа ямар нэг үл хамаарах хувьсагчтай пропорционал байх, алдааны дисперсүүд зөвхөн хоёр утга авах) хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн арга хэрэглэж, регрессийн коэффициентуудын зохимжтой үнэлэлтийг гарган авч болно.

4. Хэрэв гетероскедастиктой загварт хамгийн бага квадратын стандарт арга ашигласан бол харгалзах ковариацийн матрицын зохимжтой үнэлэлт гарган авахын тулд алдааны үнэлэлтийн Уайт, Невье-Вестийн хэлбэрүүдийг ашиглаж болно.

Жишээ. Москва хот дахь сууцны зах зээл. (Үргэлжлэл-3, Эхлэлийг § 3.5–аас, Үргэлжлэл-1–ийг § 4.2–оос, Үргэлжлэл-2–ийг § 6.1–ээс үз)

$(*)$ загварын алдааны гетероскедастик шинжийг шалгахын тулд $LOGLIVSP$ хувьсагчаар нь хийсэн Гольдфелд-Куандтын тестийг ашиглая. Ажиглалтын 464 өгөгдлийг барагцаагаар хоорондоо тэнцүү гурван бүлэгт хуваана.

Бүлэг 1–т $LOGLIVSP > 3.8$ байх 155 ажиглалт, Бүлэг 2–т $LOGLIVSP < 3.35$ байх 149 ажиглалтыг оруулав.

Регрессорууд шугаман хамааралтай болж *dummy trap* үүссэн тул I тохиолдолд $R1$ хувьсагчийг, II тохиолдолд $R2$, $R3$, $R4$ хувьсагчдыг хаяхад хүрнэ. Ийнхүү хоёр тохиолдол бүрт регрессорын тоо анх байсан утгаас (13) ялгаатай болно. Өөрөөр хэлбэл, чөлөөний зэргүүд нь харгалзан $143 = 155 - 12$; $139 = 149 - 10$ (12 ба 10 нь харгалзан I ба II регрессийн регрессоруудын тоо). Энд, регрессоруудын тоо нь өөр өөр байх үеийн Гольдфелд-Куандтын тестийн өргөтгөлийг ашиглав.

Бүлэг бүрийн хувьд регрессийг үнэлж үлдэгдлүүдийн квадратыг олоход дараах үр дүн өгөв:

$$\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_1 = 6.80, \qquad \boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_2 = 3.76.$$

Иймд $F = \dfrac{\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_1/143}{\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_2/139} = 1.7$. Фишерийн тархалттай $F(143, 139)$ санамсаргүй хэмжигдэхүүн 1–ээс их утга авах магадлал 95%. Гарган авсан F–ийн утга 95%–ийн босгыг давж буй тул үлдэгдлүүд гомоскедастик чанартай байх тухай таамаглал няцаагдана.

6.2 Хугацааны корреляц.

6.2.1 I эрэмбийн авторегрессийн процесс

Хугацааны цувааны шинжилгээнд, хугацааны янз бүрийн агшин дахь туршилтуудын статистик хамаарлыг тооцох шаардлага гардаг. Өөрөөр хэлбэл, ихэнх хугацааны цувааны хувьд алдаанууд корреляц хамааралгүй гэсэн урьдчилсан нөхцөл биелдэггүй. Энэ хэсэгт алдаанууд I эрэмбийн авторегрессийн процесс үүсгэх үеийн энгийн загваруудыг авч үзнэ. Өмнөх бүлэгт авч үзсэн ёсоор хамгийн бага квадратын стандарт аргыг хэрэглэвэл үл мэдэгдэх параметрүүдийн хазайлтгүй, зохимжтой үнэлэлтийг өгдөг билээ. Гэхдээ дисперсийн үнэлэлт хазайлттай, коэффициентууд нөлөөтэй эсэх тухай таамаглал сөрөг үр дүнд хүрч болдог зэргийг үзүүлж болно. Өөрөөр хэлбэл, хамгийн бага квадратын арга нь бодит байдлаас өөр оптимист дүр зургийг өгдөг билээ.

Өмнө авч үзсэний адилаар

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{6.5}$$

загварыг авъя. Үүнд, $\boldsymbol{y}$ векторын t–р компонент нь хугацааны t, $(t = 1, \dots, n)$ агшин дахь хамааран хувьсагчийн утгыг илэрхийлнэ. $\boldsymbol{X}$ матрицын эхний регрессор тогтмол гэдгийг тооцвол туршилтын t агшин дахь дэлгэрэнгүй тэгшитгэлийг бичиж болно:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \cdots + \beta_k x_{tk} + \boldsymbol{\varepsilon_t} = \boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon_t} \tag{6.6}$$

Энд $\boldsymbol{x}_t' = (1, x_{t2}, \dots, x_{tk})$– $\boldsymbol{X}$ матрицын t–р мөр.

Алдааны корреляцийг тооцох хамгийн энгийн аргуудын нэг нь алдааны санамсаргүй дараалал $\{\varepsilon_t,\ t = 1, \dots, n\}$ *нэгдүгээр эрэмбийн авторегрессийн процесс* үүсгэнэ гэж үзэх явдал юм. Нэгдүгээр эрэмбийн авторегрессийн процесс гэдэг нь алдаа дараах рекурент харьцааг хангахыг хэлнэ.

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t \tag{6.7}$$

Үүнд, $\{\nu_t,\ t = 1, \dots, n\}$ нь тэг дундажтай σ_ν^2 тогтмол дисперстэй нормал тархалттай, санамсаргүй хэмжигдэхүүний дараалал, ρ– *авторегрессийн коэффициент* гэж нэрлэгдэх үл мэдэгдэх параметр ($|\rho| < 1$). Загварыг бүрэн дүрслэхийн тулд ε_0–ийг тодорхойлох шаардлагатай байна. ε_0–ийг тэг дундажтай, $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\nu^2/(1-\rho^2)$ дисперстэй нормал тархалттай, $\{\nu_t,\ t = 1, \dots, n\}$ дарааллаас үл хамаарах санамсаргүй хэмжигдэхүүн гэж үзнэ. (6.7) тэгшитгэлээс математик дундаж авбал $\mathrm{E}\varepsilon_t = \rho\mathrm{E}\varepsilon_{t-1}$ болох ба эндээс $\mathrm{E}\varepsilon_t = 0,\ t = 1, \dots, n$ гэж олдоно. ε_{t-1} нь $\nu_1, \dots, \nu_{t-1}$-ээр илэрхийлэгдэнэ гэдгээс ε_{t-1}, ν_t үл хамаарах санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд байна. Иймээс

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \mathrm{E}(\rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t)^2 = \rho^2\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \mathrm{E}(\nu_t^2) = \rho^2\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}^2) + \sigma_\nu^2.$$

$\mathrm{E}(\varepsilon_0^2) = \sigma_\nu^2/(1-\rho)^2$ гэдгийг ашиглавал

$$\sigma_\varepsilon^2 = \mathrm{E}(\varepsilon_t^2) = \mathrm{V}(\varepsilon_t) = \sigma_\nu^2/(1-\rho^2), \quad t = 1, \dots, n. \tag{6.8}$$

(6.7) тэгшитгэлийг ε_{t-1}–ээр үржүүлж, ε_{t-1}, ν_t хамааралгүй гэдгийг ашиглавал

$$\mathrm{E}(\varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}) = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \rho\mathrm{V}(\varepsilon_{t-1}) = \rho\sigma_\varepsilon^2. \tag{6.9}$$

Үүнтэй адилаар ерөнхий тохиолдолд дараах тэнцэтгэлийг гаргаж болно.

$$\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-m}) = \rho^m\sigma_\varepsilon^2. \tag{6.10}$$

Эндээс харахад $\{\varepsilon_t\}$ дараалал стационар санамсаргүй процесс үүсгэж байна. Энэ байдалтай яулдан ε_0 хэмжигдэхүүнийг сонгон авахад хүрч байгаа юм. Үнэн хэрэг дээрээ ε_t–ийн ε_0–оос хамаарах хамаарал хугацаанаас хамааран хурдан буурах чиглэлд явагдана. Ийм учраас эконометрикийн ихэнх номонд $\{\varepsilon_t\}$ дараалалын хувьд анхны нөхцлийг авч үздэггүй. Учир нь дурын анхны утгын (ε_0) үед (6.7) процесс стационар процесс руу хурдан нийлдэг. Харин $|\rho| < 1$ нөхцөл стационар байх зайлшгүй нөхцөл болдог.

(6.9) тэнцэтгэлээс

$$\rho = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})/\sigma_\varepsilon^2 = \mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})/(\mathrm{V}(\varepsilon_t)^{1/2}\mathrm{V}(\varepsilon_{t-1})^{1/2}).$$

Иймд ρ нь дараалсан хоёр алдааны хоорондын корреляцийн коэффициент болж байна. (6.10)–ыг ашиглан $\boldsymbol{\varepsilon}$ санамсаргүй векторын ковариацийн матрицыг дараах байдлаар бичиж болно.

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{\sigma_\nu^2}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & 1 & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2.2 Авторегресстэй загварыг үнэлэх

(6.5) загварыг үнэлэх асуудлыг ρ коэффициент мэдэгдэх болон үл мэдэгдэх тохиолдол тус бүрт авч үзье.

1. ***ρ мэдэгдэх.*** Энэ тохиолдолд (6.5) загварыг үнэлэхдээ хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргыг ашиглана. $\boldsymbol{P}'\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}$ байх $\boldsymbol{P}$ матрицыг хялбархан олно. Сонгодог загвар гарган авахын тулд (6.5) системд ямар шугаман хувиргалт хийхийг хялбархан тааж болно. (6.6) тэгшитгэлийг хугацааны $t-1$ ($t \geq 2$) агшинд бичвэл

$$y_{t-1} = \boldsymbol{x}'_{t-1}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{t-1}.$$

Энэ тэгшитгэлийг ρ–оор үржүүлж, (6.6) тэгшитгэлээс гишүүнчлэн хасъя. (6.7) тэгшитгэлийг тооцвол:

$$y_t - \rho y_{t-1} = (\boldsymbol{x}_t - \rho \boldsymbol{x}_{t-1})'\boldsymbol{\beta} + \nu_t. \tag{6.11}$$

$t = 1$ үед (6.6) тэгшитгэлийг $\sqrt{1-\rho^2}$–аар үржүүлбэл:

$$\sqrt{1-\rho^2}y_1 = \sqrt{1-\rho^2}\boldsymbol{x}'_1\boldsymbol{\beta} + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_1. \tag{6.12}$$

(6.11), (6.12) системийн алдаанууд регрессийн стандарт загварын нөхцлийг хангах нь илэрхий юм. Үнэхээр, (6.11)–д $\{\nu_t,\ t = 2, \ldots, n\}$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд үл хамаарах бөгөөд σ^2_ν тогтмол дисперстэй, (6.12)-д $\sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_1$ алдаа $\{\nu_t,\ t = 2, \ldots, n\}$ хэмжигдэхүүнүүдээс үл хамаарах бөгөөд (6.8) ёсоор σ^2_ν дисперстэй байна.

Практикт ихэнхдээ эхний ажиглалтыг хасах замаар (6.12) хувиргалтыг хийдэггүй. Ингэснээр, нэг талаас анхны (6.5) загварын хувиргалт нэгэн ижил хэлбэртэй болдог нь сайн хэрэг юм. Тухайн тохиолдолд, β_1 параметрийн үнэлэлтийг гарган авахын тулд (6.11)–ийн сул гишүүний үнэлэлтийг $(1-\rho)$–д хуваахад хангалттай. Нөгөө талаас, эхний ажиглалтыг хаяж тооцох нь ялангуяа бага хэмжээтэй түүврийн хувьд чухал мэдээллийг орхигдуулах гарзтай байж болно.

2. *ρ үл мэдэгдэх.* Авторегрессийн параметр ρ мэдэгдэж байх тохиолдол ховор байдаг. Иймээс ρ үл мэдэгдэх үед түүнийг үнэлэх арга (процедур) зайлшгүй шаардлагатай. Ерөнхийдөө итерацийн аргаар үнэлэх нь түгээмэл байдаг. Хамгийн түгээмэл хэрэглэгддэг гурван аргыг доор авч үзнэ. Бид эдгээр процедуруудын нийлэлтийн тухай авч үзэхгүй.

Кохрейн-Оркаттын (Cochrane-Orcutt) процедур. Энэ процедурын эхний алхамд анхны (6.5) системийг хамгийн бага квадратын стандарт аргаар үнэлдэг. Уг үнэлэлтээр $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)'$ үлдэгдлүүдийг олно. Цааш нь:

1. ρ–ийн ойролцоо утгаар $e_t = \rho e_{t-1} + \nu_t$ регрессийн ХБК-үнэлэлт r–ийг авна.
2. $\rho = r$ үед (6.11) системийг хувирган $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн ХБК-үнэлэлт $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ векторыг олно.
3. Үлдэгдлүүдийн шинэ вектор $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}$–г байгуулна.
4. Процедурыг 1. алхмаас эхлэн давтана.

Процедурыг ρ–ийн ээлжит дөхөлт өмнөхөөсөө маш багаар ялгагдах үед зогсооно. Энэ процедур маш энгийн итерацаар гүйцэтгэгдэх тул эконометрикийн програмуудад өргөн ашигладаг.

Хилдрет-Лугийн (Hildreth-Lu) процедур. Процедурын санаа маш энгийн. ρ параметрийн боломжит утгын дарааллыг $(-1, 1)$ завсраас байгуулна. Жишээлбэл тогтмол 0.1 эсвэл 0.05 алхамтай сонгож болно. Тэдгээр боломжит утга болгоны хувьд (6.11) системийг үнэлнэ. Энэ үнэлэлт бүрийн хувьд хазайлтуудын квадратын нийлбэрийг олж, тэр нь хамгийн бага байх ρ–ийн утгыг тодорхойлно. Дараа нь энэ утгын ямар нэгэн орчноос илүү бага алхмаар боломжит утгуудыг сонгон авч процедурыг давтан хийнэ. Хүссэн нарийвчлалдаа хүрсэн үед процедурыг зогсооно. Хэрэв ρ параметрийн өөрчлөгдөх мужийн тухай нэмэлт мэдээлэл байгаа бол процедурын ажиллах хугацаа богиносно.

Дарбины (Durbin) процедур. (6.11) системийг дараах хэлбэрт бичье:

$$y_t = \beta_1(1-\rho) + \rho y_{t-1} + \beta_2 x_{t2} - \rho\beta_2 x_{t-1,2} + \cdots + \beta_k x_{tk} - \rho\beta_k x_{t-1,k} + \nu_t$$

Өөрөөр хэлбэл, y_{t-1}–ийг регрессорын тоонд, ρ–г үнэлэх параметрийн тоонд тус тус оруулж байна гэсэн үг. Энэ системд хамгийн бага квадратын стандарт аргыг хэрэглэн ρ, $\rho\beta_j$–ийн үнэлэлт r, $\widehat{\theta}_j$–г гарган авна. $\widehat{\beta}_j$ үнэлэлтийн оронд $\widehat{\theta}_j/r$–ийг авна. r–ийг (6.11)–д тавьж β параметрийн шинэ ХБК-үнэлэлт $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$–г олсноор өмнөх үнэлэлтийг сайжруулж болно.

6.2.3 Хугацааны корреляцтай эсэхийг шалгах Дарбин-Уотсоны тест.

(6.5) системийн алдаануудад хугацааны корреляц байгаа эсэхийг шалгах ихэнх тестүүд дараах санааг ашигладаг. Хэрэв алдааны вектор ε хугацааны корреляцтай бол (6.5) системд хамгийн бага квадратын стандарт аргыг хэрэглэн гарган авсан $\boldsymbol{e}$ үлдэгдэл мөн хугацааны корреляцтай байна. Энэ санааны зөвхөн нэг хувилбарыг авч үзье. Алдаанууд корреляц хамааралгүй гэсэн таамаглал дэвшүүлье. Өөрөөр хэлбэл $\mathbf{H}_0 : \rho = 0$. Эсрэг таамаглалаар $\mathbf{H}_1$: “$\mathbf{H}_0$ биш” эсвэл “$\mathbf{H}_1 : \rho > 0$” гэсэн нэг талт таамаглалыг сонгож болно.

Дарбин-Уотсоны тест хамгийн өргөн ашиглагддаг тест юм. Уг тест дараах статистик дээр үндэслэдэг.

$$\mathrm{DW} = \frac{\sum\limits_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum\limits_{t=1}^{n} e_t^2}. \tag{6.13}$$

Сул гишүүнийг регрессорын тоонд оруулсан гэж тооцно. Энэ статистик e_t ба e_{t-1}–ийн түүврийн корреляцийн коэффициенттой нягт холбоотой болохыг хялбархан харж болно. Үнэхээр, хялбар хувиргалт хийвэл

$$\begin{aligned}\mathrm{DW} &= \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \\ &= \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2 - e_1^2 + \sum_{t=1}^{n} e_t^2 - e_n^2 - 2\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2} \\ &= 2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}\right) - \frac{e_1^2 + e_n^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Туршилтын тоог хангалттай их гэвэл дараах тэнцэтгэлүүд ойролцоогоор биелэгдэнэ.

$$\frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} e_t = \frac{-e_1}{n-1} \approx 0, \quad \frac{1}{n-1}\sum_{t=2}^{n} e_{t-1} = \frac{-e_n}{n-1} \approx 0$$

Иймээс e_t ба e_{t-1}–ийн түүврийн корреляцийн коэффициент r–ийг ойролцоогоор дараах хэлбэртэй бичиж болно.

$$r \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n} e_t^2 \sum_{t=1}^{n-1} e_t^2}} \approx \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}.$$

Эцэст нь (6.14)–ийн сүүлийн нэмэгдэхүүнийг үл тооцвол

$$\mathrm{DW} \approx 2(1 - r). \tag{6.15}$$

DW статистикийн утга санааг тайлбарлая. Хэрэв e_t ба e_{t-1} хангалттай хүчтэй, эерэг корреляцтай байсан бол тодорхой утгаар e_t, e_{t-1} нь хоорондоо ойр, DW статистикийн утга бага байна. (6.15)–аас харахад хэрэв r коэффициент нэгд ойрхон бол DW хэмжигдэхүүн тэгд ойрхон байх нь үүнийг батална. Харин корреляц хамааралгүй бол DW утга 2–т ойрхон байх нь. Ийнхүү хэрэв DW статистикийн тархалт мэдэгдэж байгаа бол $\mathbf{H}_0 : \rho = 0$, $\mathbf{H}_1 : \ \rho > 0$ таамаглал шалгахдаа өгөгдсөн итгэх түвшний хувьд d^* гэсэн критик утга олж, хэрэв $\mathrm{DW} > d^*$ байвал $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг хүлээн зөвшөөрнө, эсрэг тохиолдолд $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг няцаана. DW статистикийн тархалт зөвхөн туршилтын тоо –n, регрессорын тоо –k–аас хамаараад зогсохгүй $\boldsymbol{X}$ матрицаас бүхэлдээ хамаарах учраас практикт хэрэглэхэд хүндрэлтэй. Учир нь бүх $\boldsymbol{X}$ матрицуудын хувьд d^*–ийн критик утгын таблицийг зохиох боломжгүй. Харин Дарбин, Уотсон нар зөвхөн n, k ба итгэх түвшнээс хамаарсан d_u, d_l ($d_u > d_l$) гэсэн хоёр хил байдгийг тогтоож, дараах чанаруудыг хангахыг баталсан: Хэрэв $\mathrm{DW} > d_u$ бол $\mathrm{DW} > d^*$ байх бөгөөд $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг хүлээн зөвшөөрнө. Хэрэв $\mathrm{DW} < d_l$ бол $\mathrm{DW} < d^*$ байх бөгөөд $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг

DW статистикийн утга	Дүгнэлт
$4 - d_l < \mathrm{DW} < 4$	$\mathbf{H}_0$ таамаглалыг няцаана. Сөрөг корреляцтай.
$4 - d_u < \mathrm{DW} < 4 - d_l$	Тодорхойгүй.
$d_u < \mathrm{DW} < 4 - d_u$	$\mathbf{H}_0$ таамаглалыг хүлээн зөвшөөрнө.
$d_l < \mathrm{DW} < d_u$	Тодорхойгүй.
$0 < \mathrm{DW} < d_l$	$\mathbf{H}_0$ таамаглалыг няцаана. Эерэг корреляцтай.

Хүснэгт 6.3:

няцаана. Харин $d_l < \mathrm{DW} < d_u$ үед таамаглалуудын талаар яман нэгэн зүйл хэлэх боломжгүй. Хэрэв өрсөлдөгч таамаглалыг $\mathbf{H}_1 : \ \rho < 0$ гэж сонгосон бол (сөрөг корреляц хамааралтай) дээд, доод хилүүд буюу критик утгууд нь $4 - d_l$, $4 - d_u$ болно. Эдгээр үр дүнг дараах таблиц хэлбэрээр дүрслэх нь тохиромжтой.

Энд тодорхой бус гэгдэж байгаа хэрчим дээр уг аргаар автокорреляцийг шалгах нь маш хүндрэлтэй. Магадгүй тэдгээр завсрын урт хангалттай их байж болно. Жишээлбэл, $n = 19$, $k = 3$ үед тодорхой бус байх завсар $(0.97, 1.68)$ гэж олдоно. Иймээс цаашдын судалгаанууд тодорхой бус завсрыг багасгахад чиглэгдсэн байдаг.

Өөр нэг чухал санамжийг хэлье. Регрессорууд болон алдаанууд корреляцгүй гэсэн урьдчилсан нөхцлийн үед Дарбин-Уотсоны тест боловсрогдсон. Ийм учраас, тухайлбал регрессоруудын дотор хамааран хувьсагч y–ын хугацааны хоцролттой утга байгаа тохиолдолд энэ тестийг ашиглах боломжгүй юм.

Дүгнэлт:

1. Хугацааны цувааны шинжилгээнд алдаанууд хугацааны хувьд корреляц хамааралтай бол, хамгийн бага квадратын стандарт аргад засвар хийх шаардлагатай.

2. Алдаа ихэнхи тохиолдолд I эрэмбийн авторегрессийн стационар процесс (6.14) үүсгэдэг гэж үзэж болно.

3. Алдаа I эрэмбийн авторегрессийн процесс үүсгэж байхад стандарт ХБК-үнэлэлт хазайлтгүй, зохимжтой боловч эрчимтэй биш байна.

4. Хамгийн бага квадратын арга ашигласан үед дисперсийн үнэлэлт багасна.

5. Хэрэв авторегрессийн коэффициент мэдэгдэж байгаа бол хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн арга нь анхны системийг (6.11),(6.12) тэгшитгэлүүдэд шилжүүлэн, дахин хамгийн бага квадратын стандарт арга хэрэглэхэд хүргэнэ.

6. Авторегрессийн коэффициент үл мэдэгдэх үед түүнийг үнэлэх болон дараа нь (6.11),(6.12) хувиргалтыг хэрэглэхэд тохиромжтой. Хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн аргын хэд хэдэн процедур байдаг.

7. Корреляц байгаа эсэх тухай таамаглалыг шалгах хамгийн их дэлгэрсэн аргуудын нэг нь DW статистик дээр үндэслэсэн Дарбин-Уотсоны тест юм. DW статистикийн хувьд тодорхой биш муж оршин байдаг нь энэхүү тестийн онцлог бөгөөд уг муж дээр корреляц байгаа эсэх тухай таамаглалыг хүлээн зөвшөөрөх эсвэл няцаах үндэслэлгүй юм.

6.3 Бататгах дасгал, бодлого.

Бодлого 6.1. Гетероскедастик шинжтэй хос регрессийн хувьд, ХБК–ын жигнэсэн аргаар олсон $\widehat{\beta}$–параметрийн үнэлэлтийн дисперс нь ердийн ХБК–ын үнэлэлтийн дисперсээс бага болохыг шалга.

Бодолт. Энэ бодлогыг бодох боломжит гурван аргыг үзүүлье.

Бодолт1. Гетероскедастиктай хос регресийн загвар авъя.

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n;$$
$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad V(\varepsilon_t) = \sigma_t^2, \quad E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0, \quad s \neq t.$$

Бүлэг 3–д авч үзсэн томъёо ёсоор

$$\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS}} = \frac{\sum x_{*t} y_{*t}}{\sum x_{*t}^2} = \frac{\sum x_{*t} y_t}{\sum x_{*t}^2}.$$

Үүнд, x_{*t}, y_{*t} нь дунджаас хазайх хазайлт: $x_{*t} = x_t - \overline{x}$, $y_{*t} = y_t - \overline{y}$.

ХБК-үнэлэлтийн дисперсийг бодвол

$$V(\widehat{\beta}_{\mathrm{OLS}}) = \frac{\sum x_{*t}^2 V(y_t)}{(\sum x_{*t}^2)^2} = \frac{\sum x_{*t}^2 \sigma_t^2}{(\sum x_{*t}^2)^2}.$$

(5.5) томъёо ёсоор, ХБК–ын нэмэлт нөхцөлтэй аргаар дисперсийг олбол:

$$V(\widehat{\beta}_{\mathrm{GLS}}) = \frac{\sum \frac{1}{\sigma_t^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_t^2} \sum \frac{x_t^2}{\sigma_t^2} - \left(\sum \frac{x_t}{\sigma_t^2}\right)^2}.$$

$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$ тэгшитгэлийг дараах хэлбэрт хувиргаж болно:

$$y_t = (\alpha + \beta \overline{x}) + \beta x_{*t} + \varepsilon_t.$$

Энэ хэлбэрийн хувьд ХБК–ын өргөтгөсөн аргын үнэлэлтийн дисперсийг дараах томъёогоор олж болно.

$$V(\widehat{\beta}_{\mathrm{GLS}}) = \frac{\sum \frac{1}{\sigma_t^2}}{\sum \frac{1}{\sigma_t^2} \sum \frac{x_{*t}^2}{\sigma_t^2} - \left(\sum \frac{x_{*t}}{\sigma_t^2}\right)^2}.$$

Энэ тэнцэтгэл үнэн болохыг батлахын тулд дараах леммийг авч үзье.

Лемм 6.3.1.

$$\sum a_t^2 \sum b_t^2 \sum c_t^2 + 2 \sum a_t b_t \sum a_t c_t \sum b_t c_t - \sum a_t^2 \left(\sum b_t c_t\right)^2 -$$
$$\sum b_t^2 \left(\sum a_t c_t\right)^2 - \sum c_t^2 \left(\sum a_t b_t\right)^2 \geq 0.$$

Б а т а л г а а: Дараах тэгш хэмтэй матрицыг авъя.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \sum a_t^2 & \sum a_t b_t & \sum a_t c_t \\ \sum a_t b_t & \sum b_t^2 & \sum b_t c_t \\ \sum a_t c_t & \sum b_t c_t & \sum c_t^2 \end{bmatrix}.$$

Дурын $\boldsymbol{\alpha} = [\begin{array}{ccc}\alpha & \beta & \gamma\end{array}]'$ векторын хувьд

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} &= [\begin{array}{ccc}\alpha & \beta & \gamma\end{array}]\begin{bmatrix}\sum a_t^2 & \sum a_tb_t & \sum a_tc_t\\ \sum a_tb_t & \sum b_t^2 & \sum b_tc_t\\ \sum a_tc_t & \sum b_tc_t & \sum c_t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{bmatrix} =\\ &= \alpha^2\sum a_t^2 + \beta^2\sum b_t^2 + \gamma^2\sum c_t^2 + 2\alpha\beta\sum a_tb_t + 2\alpha\gamma\sum a_tc_t + 2\beta\gamma\sum b_tc_t\\ &= \sum(\alpha a_t + \beta b_t + \gamma c_t)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Иймд, $\boldsymbol{A}$ матриц сөрөг биш тодорхойлогдсон байна. Тэгвэл түүний тодорхойлогч нь сөрөг биш байх ёстой гэдгээс лемм батлагдана:

$$\det \boldsymbol{A} = \sum a_t^2\sum b_t^2\sum c_t^2 + 2\sum a_tb_t\sum a_tc_t\sum b_tc_t - \sum a_t^2\left(\sum b_tc_t\right)^2 - \\ \sum b_t^2\left(\sum a_tc_t\right)^2 - \sum c_t^2\left(\sum a_tb_t\right)^2 \geq 0.$$

Хэрэв $\sum b_tc_t = 0$ бол тэнцэтгэл биш дараах хэлбэртэй болно.

$$\sum a_t^2\sum b_t^2\sum c_t^2 - \sum b_t^2\left(\sum a_tc_t\right)^2 - \sum c_t^2\left(\sum a_tb_t\right)^2 \geq 0.$$

$V(\widehat{\beta}_{\text{OLS}})$–г $V(\widehat{\beta}_{\text{GLS}})$–д хуваатж, $a_t = \dfrac{x_{*t}}{\sigma_t}$, $b_t = x_{*t}\sigma_t$, $c_t = \dfrac{1}{\sigma_t}$ гэсэн тэмдэглэгээ оруулан $\sum b_tc_t = \sum\dfrac{x_{*t}\sigma_t}{\sigma_t} = \sum x_{*t} = 0$ болохыг анхаарч, дээр баталсан леммийг ашиглавал:

$$\begin{aligned}\frac{V(\widehat{\beta}_{\text{OLS}})}{V(\widehat{\beta}_{\text{GLS}})} - 1 &= \frac{\sum x_{*t}^2\sigma_t^2}{\left(\sum x_{*t}^2\right)^2}\cdot\frac{\sum\frac{1}{\sigma_t^2}\sum\frac{x_{*t}^2}{\sigma_t^2} - \left(\sum\frac{x_{*t}}{\sigma_t^2}\right)^2}{\sum\frac{1}{\sigma_t^2}} - 1\\ &= \frac{\sum a_t^2\sum b_t^2\sum c_t^2 - \sum b_t^2\left(\sum a_tc_t\right)^2 - \sum c_t^2\left(\sum a_tb_t\right)^2}{\sum c_t^2\left(\sum a_tb_t\right)^2} \geq 0.\end{aligned}$$

Бодолт2. Матрицан тэмдэглэгээ ашиглавал:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}} &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}\\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}\\ &= ((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Үнэлэлтүүдийн ялгаварын ковариацийн матрицыг олъё (энд, $V(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\Omega}$, $V(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{A}V(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{A}'$ тэмдэглэгээ оруулав):

$$\begin{aligned}V(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}) &= V(((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}' - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1})\boldsymbol{\varepsilon})\\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\\ &\quad - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\\ &\quad + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\\ &\quad - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} + (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}.\end{aligned}$$

Ковариацийн матриц сөрөг биш учраас

$$V(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}) \geq 0$$

буюу

$$V(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{OLS}}) - V(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\text{GLS}}) \geq 0.$$

Бодолт3.

$$\boldsymbol{X} = [\ \boldsymbol{\imath} \quad \boldsymbol{x}\ ], \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & ::: & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

учраас

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \sum \frac{x_t^2}{\sigma_t^2} & -\sum \frac{x_t}{\sigma_t^2} \\ -\sum \frac{x_t}{\sigma_t^2} & \sum \frac{1}{\sigma_t^2} \end{bmatrix}.$$

Үүнд,

$$\Delta = \sum \frac{1}{\sigma_t^2} \sum \frac{\boldsymbol{x}_t^2}{\sigma_t^2} - \left(\sum \frac{\boldsymbol{x}_t}{\sigma_t^2} \right)^2.$$

Дараах $\boldsymbol{P}$ матрицыг авч үзье.

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}.$$

Энэ матриц идемпотент болохыг хялбархан шалгаж болно. Идемпотент матрицын чанар ёсоор дурын $\boldsymbol{z}$ векторын хувьд $\boldsymbol{z}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} \leq \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z}$ тэнцэтгэл биш биелэнэ.

$\boldsymbol{z}$ векторын компонент нь $z_t = \sigma_t x_{*t}$.

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\imath}' \\ \boldsymbol{x}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{*1} \\ \ddots \\ x_{*n} \end{bmatrix} = \sum x_{*t}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

учир

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} &= \frac{(\sum x_{*t}^2)^2}{\Delta}[\ 0 \quad 1\ ] \begin{bmatrix} \sum \frac{x_t^2}{\sigma_t^2} & -\sum \frac{x_t}{\sigma_t^2} \\ -\sum \frac{x_t}{\sigma_t^2} & \sum \frac{1}{\sigma_t^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{(\sum x_{*t}^2)^2 \sum \frac{1}{\sigma_t^2}}{\Delta} \leq \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z} = \sum \sigma_t^2 x_{*t}^2. \end{aligned}$$

Сүүлчийн тэнцэтгэл бишийг $\left(\sum x_{*t}^2\right)^2$–д хуваавал бидний хүссэн тэнцэтгэл биш гарна.

Санамж 6.3.1. Дээрх баталгаанд ашигласан идемпотент матрицын чанарыг баталъя. Хэрэв $\boldsymbol{P}$ матриц нь идемпотент бол $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P}$ нь мөн идемпотент болохыг хялбархан шалгаж болно. Идемпотент матрицын хувийн утгууд нь зөвхөн 1 болон 0–ээс тогтох тул сөрөг биш тодорхойлогдоно. Иймд дурын $\boldsymbol{z}$ векторын хувьд

$$\boldsymbol{z}'(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{P})\boldsymbol{z} \geq 0 \text{ эндээс } \boldsymbol{z}'\boldsymbol{I}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{z} \geq 0 \text{ буюу } \boldsymbol{z}'\boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{z}'\boldsymbol{P}\boldsymbol{z}.$$

Бодлого 6.2. $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$ тэгшитгэл авч үзье. ε_t нь II эрэмбийн авторегрессийн процесс үүсгэдэг байг:

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + u_t.$$

Параметрийг үнэлэх Кохрейн-Оркаттын итерацын аргыг энэ загварын хувьд өргөтгөн томъёол.

Бодолт. Өгөгдсөн загварын хувьд Кохрейн-Оркаттын итерацын аргыг дараах байдлаар томъёолж болно:

1. $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$ гэсэн анхны тэгшитгэлд ХБК–ын арга хэрэглэж үлдэгдлүүдийн вектор $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_n)'$–г олно.

2. $e_t = \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + u_t$ загвар дахь $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2)'$ векторын ойролцоо утгаар түүний ХБК-үнэлэлт $\widehat{\rho}_{\mathrm{OLS}} = (\widehat{\rho}_1, \widehat{\rho}_2)'$–ийг авна.

3. Дараах хэлбэрт хувиргасан тэгшитгэлийг авч үзнэ.

$$y_t - \rho_1 y_{t-1} - \rho_2 y_{t-2} = \alpha(1 - \rho_1 - \rho_2) + \beta(x_t - \rho_1 x_{t-1} - \rho_2 x_{t-2}) + u_t.$$

   Энэ тохиолдолд регрессийн алдаа сонгодог регрессийн загварын нөхцөлүүдийг хангана. ρ_1, ρ_2–ын оронд харгалзан $\widehat{\rho}_1$, $\widehat{\rho}_2$–г тавьж ХБК аргаар $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ үнэлэлтийг олно.

4. Алдааны шинэ вектор $\boldsymbol{e}_t = y_t - \widehat{\alpha} - \widehat{\beta} x_t$–ийг олно.

5. 2.–алхмаас эхлэн өгөгдсөн нарийвчлалыг хангах хүртэл процедурыг давтана.

Бодлого 6.3. $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$ системийн хувьд сонгодог нормал загварын нөхцөлүүдээс нэгээс бусад нь биелдэг, харин алдааны дисперс дараах харьцаагаар илэрхийлэгддэг гэе.

$$\sigma_t^2 = \mu + \delta x_t.$$

α, β параметрүүдийг үнэлэх хоёр алхамт процедурыг томъёол.

Бодолт. Процедурыг дараах байдлаар томъёолж болно:

1. $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$ тэгшитгэлийг ХБК аргаар үнэлнэ. Регрессийн үлдэгдэл e_t–г олно.

2. $e_t^2 = \mu + \delta x_t + u_t$ тэгшитгэлийг үнэлж, дисперсийн үнэлэлт $\widehat{\sigma}_t^2$–ийн оронд $\widehat{\sigma}_t^2 = \widehat{\mu} + \widehat{\delta} x_t$ хэмжигдэхүүнийг авна.

3. Анхны $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t$ загварт хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргыг хэрэглэнэ. Өөрөөр хэлбэл,

$$\frac{y_t}{\widehat{\sigma}_t^2} = \alpha \frac{1}{\widehat{\sigma}_t^2} + \beta \frac{x_t}{\widehat{\sigma}_t^2} + \frac{\varepsilon_t}{\widehat{\sigma}_t^2}$$

   регресс байгуулна. Эндээс олсон үнэлэлтүүд зохимжтой байна.

t	ω_t	u_t	t	ω_t	u_t	t	ω_t	u_t
1	1.73	8.65	9	5.06	2.87	17	3.15	4.72
2	1.94	4.82	10	2.81	5.29	18	1.92	7.45
3	3.05	2.67	11	4.43	3.31	19	2.26	6.21
4	4.17	2.67	12	3.19	5.44	20	6.18	2.64
5	2.52	2.58	13	2.23	6.80	21	2.07	8.55
6	1.71	8.07	14	2.06	8.25	22	8.39	2.60
7	1.95	8.83	15	3.33	3.44	23	2.75	6.25
8	2.57	5.54	16	2.12	7.80	24	6.10	2.70

Хүснэгт 6.4:

Бодлого 6.4. Ажлын байрны тоо ω_t болон ажилгүйдлийн түвшин u_t–г холбосон загвар авч үзье.

$$\ln \omega_t = \beta_1 + \beta_2 \ln u_t + \varepsilon_t.$$

ε_t алдаа $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ нормал тархалттай бөгөөд үл хамаарах байг.

а) Хүснэгт 6.4–ийн өгөгдлийг ашиглан β_1, β_2 параметрүүдийн ХБК-үнэлэлтийг ол. β_2–ын 95%–ын итгэх завсрыг ол.

б) Дарбин-Уотсоны статистикийн утгыг ол. Энэ утга анх төсөөлж байсан ε_t алдааны талаар юу хэлж байна вэ? а)–д олдсон итгэх завсрын тухай юу хэлж болох вэ?

в) Алдаа нь нэгдүгээр эрэмбийн автокорреляцтай загвар ашиглан дээрх тэгшитгэлийг дахин үнэл. β_2–ын 95%-ийн итгэх завсрыг байгуул. а)–д гарган авсан итгэх завсартай харьцуулан үз.

Бодолт. а) Эконометрикийн багц программ ашиглан загварын параметрүүдийг үнэлбэл:

Хамааран хувьсагч: $\ln \omega$

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	2.2997	0.1860	12.366	0.0000
$\ln u$	-0.7791	0.1133	-6.8746	0.0000
R^2	0.6824			
DW.статистик	1.1026			

Бид $\widehat{\beta}_1 = 2.3$, $\widehat{\beta}_2 = -0.78$ гэж оллоо. Одоо β_2–ын итгэх завсрыг байгуулъя.

$$\beta_2 = \widehat{\beta}_2 \pm t_{0.95}(24-2) \cdot s_{\widehat{\beta}_2} = -0.7791 \pm 2.074 \cdot 0.1133$$

буюу $(-1.014, -0.544)$.

б) Дарбин-Уотсоны шинжүүрийн утга 2-оос мэдэгдэхүйц бага байгаа нь регрессийн алдаа нэгдүгээр эрэмбийн, эерэг автокорреляцтай байж болохыг гэрчилнэ. Энэ дүгнэлт стандарт загварт алдаанууд автокорреляцгүй гэсэн нөхцлийг зөрчих учраас а)–д олсон стандарт алдаа буруу (үнэн биш) томъёогоор бодогдсон байх талтай. Энэ нь гарган авсан итгэх завсар мөн буруу болоход хүргэнэ.

в) Регрессийн алдаа нэгдүгээр эрэмбийн автокорреляцтай тохиолдолд загварын параметрүүдийн үнэлэлтийг эконометрикийн багц программ ашиглан олбол:

Хамааран хувьсагч: $\ln \omega$

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	2.3949	0.1717	13.9452	0.0000
$\ln u$	-0.8312	0.0954	-8.7144	0.0000
AR(1)	0.4676	0.2038	2.2944	0.0327
R^2	0.7291			
DW.статистик	2.1617			

β_2–ын 95%-ийн итгэх завсар: $(-1.03, -0.633)$. Өөрөөр хэлбэл, тухайн түүврийн хувьд а)–д олсон үр дүнгээс бараг ялгагдахгүй байна. Дарбин-Уотсоны статистик 2–т ойрхон байгаа загварын алдаа автокорреляцгүй болохыг илэхийлэх бөгөөд эхний үнэлэлт нь хоёрдахиасаа бага байна.

Бодлого 6.5. Хүснэгт 6.5–д 30 өрхийн орлого–Y_d ба хэрэглээний зарцуулалт–C өгөгдөв (доллараар).

а) C–ийн Y_d–дээрх регрессийг байгуулж, гетероскедастиктай эсэхийг шалга.

б) Хэрэв а)–д гетероскедастик шинж илэрсэн бол түүнийг зас.

Хэрэглээ			Орлого
10700	10900	11200	12000
11400	11700	12100	13000
12300	12600	13200	14000
13000	13300	13600	15000
13800	14000	14200	16000
14400	14900	15300	17000
15000	15700	16400	18000
15900	16500	16900	19000
16900	17500	18100	20000
17200	17800	18500	21000

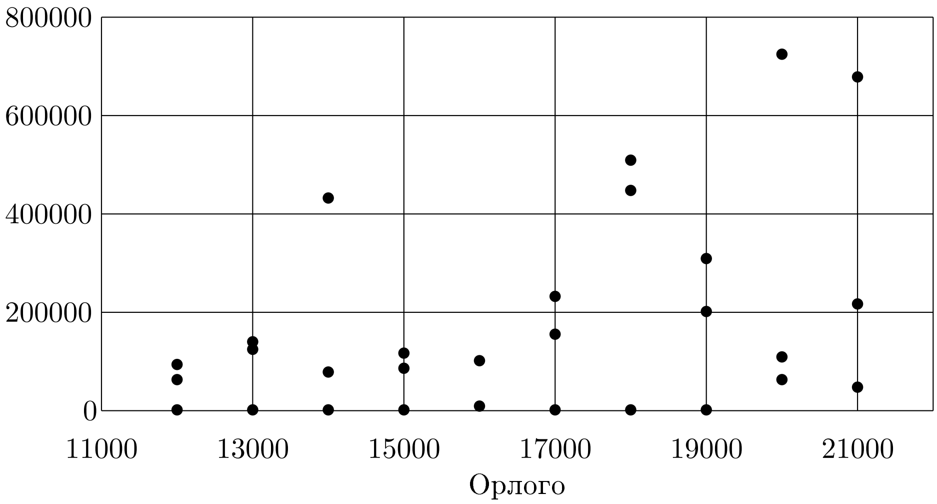
Хүснэгт 6.5:

Бодолт. а) Эконометрикийн багц программаар параметрүүдийн үнэлэлтийг олбол:

Хамааран хувьсагч: C

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	1580.0	447.56	3.530	0.0015
Y	0.7830	0.0267	29.30	0.0000
R^2	0.9684			

Үл хамаарах хувьсагч Y–ээс регрессийн үлдэгдлийн квадратууд хамаарах хамаарлын графикаас үзвэл гетерокедастиктай байж болох боломжтой байна (Зураг 6.1). Гольдфелд-Куандтын тестийг ашиглая. Ажиглалтуудыг Y–ийг өсөх дараалаар эрэмбэлье. Эхний 12 болон сүүлийн 12 ажиглалтаар зохиосон регресс бүрийн



Зураг 6.1:

үлдэгдлийн квадратуудын нийлбэр харгалзан 1046000, 3344000 гэж олдоно. F статистикийн утга: $F = \dfrac{3344000}{1046000} = 3.2$ нь Фишерийн статистикийн критик утга $F_{0.95}(10,10) = 2.98$–аас их байгаа нь алдаа гетероскедастиктай гэдгийг илэрхийлнэ.

Бреуш-Паганы тестийг хэрэглэе. Эхний регрессийг байгуулж, үнэлэлтийг олбол:

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum e_t^2 = \frac{4949727}{30} = 164957.6.$$

Цааш нь, $e_t^2/\widehat{\sigma}^2$–ын Y болон тогтмол дээрх регрессийг үнэлье. $RSS/2 = 4,11$ гарна. “Алдаа гетероскедастикгүй” гэсэн таамаглалын нөхцөлд энэ статистик $\chi^2(1)$ тархалттай бөгөөд 95%–ийн критик утга нь 3.84. Ийнхүү тэг таамаглал дахин няцаагдаж байна.

б) Гетероскедастик чанарыг засах хоёр алхамт процедурыг хэрэгжүүлье. Үүний тулд $1/Y$–г жин болгон авч ХБК–ын жигнэсэн аргаар өгөгдсөн тэгшитгэлийг үнэлье.

Хамааран хувьсагч: C/Y

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	0.7844	0.0249	31.46	0.0000
$1/Y$	1557.0	392.28	3.969	0.0005
R^2	0.3600			
Жигнээгүй коэф–R^2	0.9684			

Өгөгдсөн жишээний хувьд үнэлэлтүүд бараг давхцаж буй хэдий ч гетероскедастиктай тохиолдолд коэффициентуудын ХБК-үнэлэлтийн дисперсийн үнэлэлт хазайлттай болохыг санах хэрэгтэй. Сүүлийн загвар гетероскедастик чанаргүй болохыг Уайтын тест харуулна:

Уайтын тест:

F-статистик	0.5182	*Магадлал*	0.6014
Obs^*R^2	1.1090	*Магадлал*	0.5744

Бодлого 6.6. Хүснэгт 6.6–д ямар нэг салбарын 35 фирмийн нөөцийн түвшин (I), худалдааны хэмжээ (мян.долл) (S), хүүгийн хувь кредитээр (R) тус тус өгөгдөв. Эдийн засгийн төсөөллөөр I нь S–тэй эерэг, R–тэй сөрөг холбоо хамааралтай байх ёстой гэж үзнэ.

а) I–ийн S ба R дээрх регресс зохиож гетероскедастиктай эсэхийг шалга.

б) а)–тохиолдолд гетероскедастик шинж илэрсэн бол алдааны дисперс S^2–тай пропорционал гэж үзээд гетероскедастик шинжийг зас.

Фирм	I	S	R	Фирм	I	S	R
1	10	100	17	19	15	122	11
2	10	101	17	20	15	123	11
3	10	103	17	21	15	125	11
4	11	105	16	22	16	128	10
5	11	106	16	23	16	128	10
6	11	106	16	24	16	131	10
7	12	108	15	25	17	133	10
8	12	109	15	26	17	134	9
9	12	111	14	27	17	135	9
10	12	111	14	28	17	136	9
11	12	112	14	29	18	139	8
12	13	113	14	30	18	143	8
13	13	114	13	31	19	147	8
14	13	114	13	32	19	151	8
15	14	116	12	33	19	157	8
16	14	117	12	34	20	163	7
17	14	118	12	25	20	171	7
18	15	120	11				

Хүснэгт 6.6:

Бодолт. а) Эконометрикийн багц программаар параметрүүдийн үнэлэлтийг олоход дараах үр дүн гарав.

Хамааран хувьсагч: I

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	14.421	1.4463	9.971	0.0000
R	−0.6258	0.0442	−14.176	0.0000
S	0.0612	0.0076	8.021	0.0000
R^2	0.9916			

Гетероскедастиктай эсэхийг Уайтын тестээр шалгая.

Уайтын тест:

F-статистик	2.2408	*Магадлал*	0.0882
Obs^*R^2	8.0515	*Магадлал*	0.0897

Хэрэв, итгэх түвшинг 10%–аар авбал гетероскедастиктай болохыг тестийн үр дүн илэрхийлж байна.

б) Өгөгдсөн тэгшитгэлийг $1/S_t$ жинтэйгээр ХБК–ын жигнэсэн аргаар үнэлье.

Хамааран хувьсагч: I
жин: $1/S$

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	13.469	1.5590	8.423	0.0000
R	-0.5987	0.0458	-13.062	0.0000
S	0.0663	0.0087	7.599	0.0000
R^2	0.9447			
Жигнээгүй коэф–R^2	0.9915			

Энэ тэгшитгэлийг мөн Уайтын тестээр шалгавал:

Уайтын тест:

F-*статистик*	2.4986	*Магадлал*	0.0636
Obs^*R^2	8.7464	*Магадлал*	0.0678

Тестийн үр дүн урьдын адил 10%–ийн итгэх түвшинд гетероскедастик шинж байгааг илэрхийлж байна. Гетероскедастик шинжийн илүү нийлмэл загварыг (илтгэгч) авч үзье:

$$\sigma_t^2 = exp(\gamma_0 + \gamma_1 R_t + \gamma_2 S_t).$$

e^t үлдэгдлүүдийн квадратын логарифмын $\ln R_t$, $\ln S_t$ дээрх регрессийг үнэлье:

Хамааран хувьсагч: $\ln e^2$
жин: $1/S$

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	-241.94	121.66	-1.989	0.0553
$\ln R$	21.46	10.36	2.072	0.0464
$\ln S$	38.43	20.14	1.909	0.0653
R^2	0.1263			

Коэффициентүүд 10%–ийн итгэх түвшинд нөлөөтэй. Одоо өгөгдсөн тэгшитгэлийг $1/\exp(\widehat{\ln e^2})^{1/2}$ жинтэйгээр ХБК–ын жигнэсэн аргаар үнэлье. Үүнд, $\widehat{\ln e^2}$– сүүлийн туслах регрессийн прогнозын утгууд:

Хамааран хувьсагч: I
жин: $1/\exp(\widehat{\ln e^2})^{1/2}$

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	13.805	1.6119	8.564	0.0000
R	-0.6021	0.0491	-12.640	0.0000
S	0.0656	0.0088	7.476	0.0000
R^2	0.9997			
Жигнээгүй коэф–R^2	0.9911			

Энэ тэгшитгэлд Уайтын тест хэрэглэе.

Уайтын тест:

F-*статистик*	1.4633	*Магадлал*	0.2380
Obs^*R^2	5.7138	*Магадлал*	0.2216

Энэ тохиолдолд, тестийн үр дүн 10%–ийн итгэх түвшинд гетероскедастикгүй гэж гарч байна.

Бодлого 6.7. Хүснэгт 6.7–д АНУ-ын 1960–1979 оны импортын хэмжээ (M) ба дотоодын нийт бүтээгдэхүүний хэмжээ (ВНП) (мян.долл) өгөгджээ.

а) M–ийн ВНП дээрх регрессийг байгуулж, алдаа автокорреляцгүй байх тухай таамаглалыг 5%–ийн итгэх түвшинд шалга.

б) а)–тохиолдолд таамаглал няцаагдвал автокорреляцийг зас.

Он	M	ВНП	Он	M	ВНП
1960	23.2	506.0	1970	58.5	982.4
1961	23.1	523.3	1971	64.0	1063.4
1962	25.2	563.8	1972	75.9	1171.1
1963	26.4	594.7	1973	94.4	1306.6
1964	28.4	635.7	1974	131.9	1424.9
1965	32.0	688.1	1975	126.9	1528.1
1966	37.7	753.0	1976	155.4	1702.2
1967	40.6	796.3	1977	185.8	1899.5
1968	47.7	868.5	1978	217.5	2127.6
1969	52.9	935.5	1979	260.9	2368.5

Хүснэгт 6.7: D.Salvatore. Statistics and Econometrics, McGraw-Hill, 1982

Бодолт. а) M ба ВНП–ийн графикаас 1974 оны M–ийн онцгой төлөвийг харж болно (эрчим хүчний хямралаар тайлбарлагдах нь илүү магадлалтай). Энэ нь регресс–д $d1974$ гэсэн идэвхгүй хувьсагч оруулах үндэс болно (1974 онд 1–тэй тэнцүү, бусад онд 0–тэй тэнцүү утга авна). Иймд дараах регрессийг үнэлэхэд хүрнэ.

$$m_t = \beta_1 + \beta_2 \text{ВНП}_t + \beta_3 d1974_t + \varepsilon_t.$$

ХБК-үнэлэлтийн үр дүнг үзүүлбэл:

Хамааран хувьсагч: t

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	−56.0818	5.4556	−10.280	0.0000
ВНП	0.1257	0.0044	28.501	0.0000
$d1974$	8.8341	11.008	0.8025	0.4333
R^2	0.9800			
DW статистик	0.3240			

Дарбин-Уотсоны статистикийн гарган авсан утга $DW = 0.32$ нь 5%–ийн доод заагаас мэдэгдэхүйц доогуур (ойролцоогоор 0.97–той тэнцүү) байгаа нь регрессийн алдаа эерэг автокорреляцтай болохыг гэрчилнэ.

б) Алдаа автокорреляцтай тохиолдолд регрессийн коэффициентуудын дисперсийн үнэлэлт ерөнхийдөө доогуур гарна. Иймд учраас алдааны нэгдүгээр эрэмбийн автокорреляц бүхий регрессийг шинээр үнэлье.

Хамааран хувьсагч: t

Хувьсагч	*Коэффициент*	*Ст.алдаа*	*t-статистик*	*Магадлал*
const	2869.2	68657.	0.0418	0.9672
ВНП	0.1835	0.0211	8.7101	0.0000
$d1974$	19.859	1.7447	11.382	0.0000
AR(1)	1.0018	0.0431	23.220	0.0000
R^2	0.9990			
DW статистик	2.1127			

Одоо DW статистик 2–т ойрхон гарсан ч энэ утгыг тайлбарлах боломжгүй. Учир нь, баруун талдаа хамааран хувьсагчийн лагтай утгыг агуулсан тэгшитгэлийн хувьд EViews программ загварыг үнэлэхдээ шугаман бус ХБК аргыг ашигладаг. Энэ регрессийн үлдэгдлүүдийн хувьд Льюнг-Боксын статистик нь "алдаа автокорреляцгүй" гэсэн тэг таамаглалыг үгүйсгэж эс чадна. ВНП–ийн өмнөх коэффициент эхний регрессийн хэтэрхий оптимист үнэлэлтийг бодвол энэ удаад илүү өндөр стандарт хазайлттай гарсан байна.

ρ–коэффициент 1–д ойрхон байгаа нь нэгж язгуур байх боломжтойг илтгэнэ. Ийнхүү, манай тохиолдолд тэгшитгэлийг

$$\Delta m_t = \beta_1 + \beta_2 \Delta \text{ВНП}_t + \beta_3 d1974_t + \varepsilon_t.$$

гэсэн эхний (I эрэмбийн) ялгаварт үнэлсэн бол илүү зөв байх байсныг тэмдэглэе.

Бүлэг 7

Хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн арга.

Стандарт шугаман загвар авч үзье.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \tag{7.1}$$

Үүнд,

$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{\Omega}). \tag{7.2}$$

$\boldsymbol{\Omega}$-ковариацийн матриц $n \times n$ хэмжээстэй, ноормчлогдсон ($\mathrm{tr}(\boldsymbol{\Omega}) = 1$), бүрэн мэдэгдэж байгаа гэж үзье. Энэ тохиолдолд хазайлтгүй, хамгийн сайн шугаман үнэлэлт нь дараах томьёогоор олддог болохыг Бүлэг 5–т үзүүлсэн билээ.

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{7.3}$$

Энэ үнэлэлт дараах параметрүүд бүхий нормал тархалттай байдаг.

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}) \tag{7.4}$$

(7.3)-ийг хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн үнэлэлт (ХБКӨ-үнэлэлт) гэж нэрлэх бөгөөд дараах оптимизацийн бодлогын шийд болно.

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \ (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}). \tag{7.5}$$

Практикт $\boldsymbol{\Omega}$ матриц ихэнхдээ үл мэдэгдэх байдаг. Бид $\boldsymbol{\Omega}$ матрицын бүтэц өгөгдсөн, харин параметрүүдийн утга нь өгөгдөөгүй гэж үзье. Жишээлбэл, (7.1) системийн алдаа I эрэмбийн авторегресс үүсгэдэг бол $\boldsymbol{\Omega}$ матриц дараах хэлбэртэй гэдгийг мэдэж болдог.

$$\boldsymbol{\Omega}(\rho) = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \rho \\ \rho^{n-1} & \cdots & \rho & 1 \end{bmatrix} \tag{7.6}$$

Үүнд, ρ–г үнэлэх шаардлагатай үл мэдэгдэх параметр. Ерөнхий тохиолдолд, $\boldsymbol{\Omega}$ матриц төгсгөлөг тооны $\theta_1, \dots, \theta_m$ параметрээс хамаардаг гэж үзье. $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)'$ гэвэл $\boldsymbol{\theta}$ ба $(\sigma^2, \boldsymbol{\theta})$ векторууд функциональ хамааралгүй гэж үзэж болно. Энэ нь ковариацийн матрицын параметрүүд $\boldsymbol{\beta}$–аас хамаарсан функц байх тохиолдлыг үгүйсгэж байгаа юм.

$\boldsymbol{\theta}$ векторын зохимжтой үнэлэлтийг $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ гээд $\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \boldsymbol{\Omega}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$ гэж тэмдэглэе. Тэгвэл дараах хэмжигдэхүүнийг *хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн аргын (Feasible Generalised Least Squares, FGLS)* үнэлэлт гэнэ.

$$\widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} = (\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\boldsymbol{y}. \tag{7.7}$$

Хэрэв $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ нь $\boldsymbol{\theta}$ векторын зохимжтой үнэлэлт бол $\widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}}}$ нь мөн $\boldsymbol{\beta}$ векторын зохимжтой үнэлэлт юм. Ерөнхий тохиолдолд энэ дүгнэлт хүчингүй.

Дараах нөхцлүүд биелж байгаа үед ХБК–ын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн үнэлэлт $\widehat{\widehat{\boldsymbol{\beta}}}$–г зохимжтой гэж харуулж болно.

$$\lim \frac{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}}{n} = \boldsymbol{Q}, \tag{7.8}$$

$$p\lim \frac{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}}{n} = \mathbf{0}. \tag{7.9}$$

Энд $\boldsymbol{Q}$ нь төгсгөлөг, үл бөхөх матриц.

Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт. (7.2) нөхцөл биелж байхад (7.1) системийн хамгийн их үнэний хувь бүхий функц ба түүний логарифмыг бичвэл:

$$L = (2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}|\boldsymbol{\Omega}|^{-1/2}\exp\left(-\frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^2}\right),$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) + \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Omega}^{-1}| - \frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}).$$

$\ln L$ функцээс $\boldsymbol{\beta}$ болон σ^2–аар уламжлал авч тэгтэй тэнцүүлбэл:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\boldsymbol{y}, \tag{7.10}$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}})'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}). \tag{7.11}$$

Харин θ_j $(j = 1, \dots, m)$–ээр дифференциалчилбал:

$$\frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{C}_j\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\boldsymbol{e}} = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\boldsymbol{C}_j\widehat{\boldsymbol{\Omega}}). \tag{7.12}$$

Үүнд,

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \quad \boldsymbol{C}_j = \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})}{\partial\theta_j}.$$

(7.10)–(7.12) тэгшитгэлийн системийн шийд нь хамгийн их үнэний хувь бүхий аргын үнэлэлт –$\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$, $\widehat{\sigma}^2$ юм. Энэ системийн (7.12) тэгшитгэлийг бодоход нилээд хүнд. Зарим тохиолдолд хялбархан бодогдох боловч ихэнхдээ итерацийн аргыг хэрэглэх шаардлагатай болдог.

(7.12) тэгшитгэл ба $\boldsymbol{\varepsilon}$ тэгш хэмт тархалттай гэдгээс $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})$ ба $-(\widehat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})$ хэмжигдэхүүнүүд адилхан тархалттай болох нь мөрднө. Эндээс $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ хэмжигдэхүүн $\boldsymbol{\beta}$–ийн орчинд тэгш хэмтэй тархах ба хэрэв математик дундаж нь орших бол хазайлтгүй үнэлэлт байх нь мөрднө.

(7.10) – (7.12) системийг бодох хэд хэдэн арга байдаг. Хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар яг тодорхой шийдийг олохоос гадна дараах хоёр алхамт процедурыг түгээмэл хэрэглэнэ.

1. Хамгийн бага квадратын стандарт аргаар $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(1)} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}$. үнэлэлт байгуулна. Дараа нь $\boldsymbol{e}_{(1)}$ үлдэгдлийг олно. Энэ үлдэгдлээ ашиглан (7.12) тэгшитгэлийг бодож, $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(1)}$ $(m \times 1)$ параметрийг олно. Эндээс $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{(1)} = \boldsymbol{\Omega}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(1)})$ матрицыг байгуулна.

2. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(2)} = (\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{(1)}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_{(1)}^{-1}\boldsymbol{y}$. Зарим сул нөхцлийн үед (жишээ нь $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_{(1)}$ зохимжтой үнэлэлт гэх мэт) $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{(2)}$ үнэлэлт хязгаартаа хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлттэй эквивалент байна. Мөн түүврийн тоо их үед хамгийн их үнэний хувь бүхий аргын үнэлэлт хязгаартаа эрчимтэй байна.

7.1 Бататгах дасгал, бодлого

Бодлого 7.1. Энэ бодлогонд, хэрэв $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(\theta)$ бөгөөд, $\widehat{\theta}$–нь θ–ийн зохимжтой үнэлэлт бол ХБК–ын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн аргын үнэлэлт нь ерөнхийдөө ХБК–ын өргөтгөсөн үнэлэлттэй давхцах хязгаарын тархалттай биш гэдгийг үзүүлнэ.

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \theta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \theta^{n-1} \end{bmatrix} \text{ ба } \widehat{\theta} = \theta + \frac{1}{n} \text{ байг.}$$

а) $\boldsymbol{p}\lim(\widehat{\theta}) = \theta$ болохыг үзүүл.

б) $\theta = 1$ үед $\dfrac{1}{n}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{x} = 1$ ба $\dfrac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\varepsilon}{\sqrt{n}} \sim N(0,\sigma^2)$ гэж харуул.

в) $\widehat{\beta}(\theta) = (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\theta)\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\theta)\boldsymbol{y}$ байг. $\theta = 1$ үед $\sqrt{n}(\widehat{\beta}(\theta) - \beta) \sim N(0,\sigma^2)$ болохыг үзүүл.

г) Нөгөө талаас, $\theta = 1$ үед $\dfrac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{x}}{n} \to e-1$ ба $\dfrac{\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\varepsilon}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2\dfrac{e^2-1}{2}\right)$ болохыг харуул.

д) $\theta = 1$ үед $\sqrt{n}(\widehat{\beta}(\theta) - \beta) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2\dfrac{e+1}{2(e-1)}\right)$ гэж батал.

$\xrightarrow{d}$ тэмдэглэгээ нь тархалтаараа нийлэхийг илэрхийлнэ.

е) θ–ийн утга 1–тэй тэнцүү үед асимптотлог тархалт $\widehat{\beta}(\widehat{\theta})$ нь (хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн үнэлэлт), $\widehat{\beta}(\theta)$–тэй (хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн үнэлэлт) үл давхцана гэдгийг харуул.

Бодолт. а) $\widehat{\theta} = \theta + \dfrac{1}{n}$ нь санамсаргүй биш хэмжигдэхүүн бөгөөд $n \to \infty$ үед θ–рүү нийлнэ. Иймд $\widehat{\theta}$ үнэлэлт нь зохимжтой.

б) $\theta = 1$ үед $\mathbf{\Omega}^{-1}(\theta)$ нь нэгж матриц болно. Иймээс

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{n}n = 1.$$

$$\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

болохыг анхаарвал

$$\frac{\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{n}} = \frac{\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n}{\sqrt{n}} \sim N(0, \sigma^2).$$

(Энд $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2\boldsymbol{I})$ гэдгийг ашиглав).

в) $\widehat{\beta}(\theta) = (\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}(\theta)\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}(\theta)\boldsymbol{y}$ болог. Тэгвэл $\theta = 1$ үед

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(\widehat{\beta}(\theta) - \beta) &= \sqrt{n}((\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}(\theta)\boldsymbol{x}^{-1})\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}(\theta)\boldsymbol{y} - \beta) \\
&= \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}(\theta)\boldsymbol{y} - \beta\right) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}(\theta)(\beta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varepsilon}) - \beta\right) \\
&= \frac{\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}(\theta)\boldsymbol{\varepsilon}}{\sqrt{n}} \sim N(0, \sigma^2).
\end{aligned}$$

г) $\theta = 1$ бол

$$\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{x}}{n} &= \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{n} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & (1 + \frac{1}{n})^{n-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k = \frac{1}{n}\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} e - 1.
\end{aligned}$$

$$\xi_n = \frac{\boldsymbol{x}'\mathbf{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{\varepsilon}}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{\varepsilon_k}{\sigma}$$

санамсаргүй хэмжигдэхүүн авч үзье.

Түүний характеристик функцийг бичвэл: $n \to \infty$ үед

$$\begin{aligned}
\phi_{\xi_n} &= E\exp\{i\lambda\xi_n\} = E\exp\left\{\frac{i\lambda}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{\varepsilon_k}{\sigma}\right\} \\
&= \prod_{k=1}^{n}\phi_{\xi_k/\sigma}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}\right) = \prod_{k=1}^{n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}\right)^2\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right)^{k-1}\right\} = \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2n}\frac{(1+\frac{1}{n})^{2n}-1}{(1+\frac{1}{n})^2-1}\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{(1+\frac{1}{n})^{2n}-1}{2+\frac{1}{n}}\right\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\frac{e^2-1}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Энэ хязгаар $N\left(0, 1/2\cdot(e^2-1)\right)$ гэсэн нормал санамсаргүй хэмжигдэхүүний характеристик функцтэй давхцаж байна. Тэгвэл $n\to\infty$ үед

$$\sigma\xi_n \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2\frac{e^2-1}{2}\right).$$

д) $\widehat{\beta}(\theta) = (\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{y}$ байг. $\theta = 1$ үед

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}(\widehat{\beta}(\widehat{\theta})-\beta) &= \sqrt{n}\left((\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})y-\beta\right) \\
&= \sqrt{n}\left((\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})(\boldsymbol{x}\beta+\varepsilon)+\beta\right) \\
&= \sqrt{n}\left((\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{x}\beta-\beta\right) \\
&\quad + \sqrt{n}(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{\varepsilon} \\
&= n(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{x})^{-1}\sigma\xi_n.
\end{aligned}$$

г)–тохиолдолд баталсан үр дүнг ашиглавал:

$$n(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\widehat{\theta})\boldsymbol{x})^{-1} \to \frac{1}{e-1}.$$

Иймд

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}(\widehat{\theta})-\beta) \xrightarrow{d} \frac{1}{e-1}N\left(0, \sigma^2\frac{e^2-1}{2}\right) \sim N\left(0, \sigma^2\frac{e+1}{2(e-1)}\right).$$

е) Бодлогын баталгаа

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}(\theta)-\beta) \sim N(0, \sigma^2)$$

гэсэн нөхцлөөс шууд мөрдөн гарах тул

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta}(\widehat{\theta})-\beta) \xrightarrow{d} N\left(0, \sigma^2\frac{e+1}{2(e-1)}\right).$$

Бүлэг 8

Шугаман регрессийн загвараар прогнозлох

Энэ номын өмнөх бүлгүүдэд шугаман регрессийн сонгодог загвар, параметрүүдийн үнэлэлтэд тохиолдож болох гол бэрхшээлийн нэг мултиколлинеар (коллинеар) шинж, алдааны дисперсүүд ялгаатай байх (*heteroscedasticity*) тохиолдол болон авторегрессийн загвартай танилцсан болно. Энэ бүлэгт математик загварчлалын ерөнхий ойлголтыг хөндөж, шугаман регрессийн загвараар прогнозлох тухай товч өгүүлэх болно.

Цаг агаарын мэдээ, эдийн засгийн хэтийн төлөвийн тухай мэдээ зэрэг нь прогнозын дүн байдаг. Бодит байдалд аль болох сайн нийцсэн математик загвар ашиглаж прогноз хийдэг. Прогнозын дүн, урьдчилсан мэдээ зэрэг нь математик загварын гадаад хувьсагчдын тодорхой утганд харгалзах дотоод хувьсагчдын утга юм. Ерөнхий тохиолдолд системийн хэтийн төлөвийг урьдчилан таамаглах үйл явцыг *прогнозлол* гэнэ. Загвар нь математик загварчлалын эцсийн бүтээгдэхүүн байдаг ба загварыг зөв хэрэглэх үйл ажиллагааг *прогноз* гэж ойлгож болно. Жишээлбэл хүн амын прогнозын загварт жилийн тоо хэт их байж болохгүй.

Математик загвар *дискрет* ба *тасралтгүй*, *детерминистик* ба *стохастик*, *статик* ба *динамик*, *оновчлолын* ба *тэнцвэрийн*, түүнчлэн *симуляци* загвар зэрэг төрлүүдтэй байдаг. Шугаман регрессийн тэгшитгэл бол дотоод хэсэг нь Y, гадаад хэсэг нь (орчин нь) $X_1, \ldots, X_k$ хүчин зүйлээс тогтох задгай системийн стохастик загвар юм.

Аливаа үзэгдэл ба зорилгод хүрэхийн төлөө гаргах шийдвэрт хувьсах чанар үзүүлдэг хүчин зүйлс *системд* хамаарах ба системийн хувьсалд нөлөөлөх боловч тоо хэмжээгээ харьцангуй сайн хадгалж үлддэг хүчин зүйлс нь *орчныг* бүрдүүлнэ. Системийн орчин ямагт хязгааргүй байна. Орчинтойгоо харьцдаг системийг *задгай систем*, орчинтойгоо харьцдаггүй системийг *битүү систем* гэнэ. Орон зай эзлэх системийг *биет систем*, орон зай эзлэхгүй системийг *концептуал систем* гэнэ. Систем, үзэгдэл ба онолыг илэрхийлэх математик дүрслэлийг *математик загвар* гэнэ. Системийг математик загварын аргаар судлах ухааныг *математик загварчлал* гэнэ. Системийн математик загвар нь системийг танин мэдэх хэрэгсэл бөгөөд түүнийг шинжлэх өргөн бололцоо агуулдаг. Сайн загвар боловсруулахын тулд математик загварчлалын шатууд болох

1. Систем тодорхойлох
2. Загвар томъёолох
3. Загварыг шийдэх
4. Загварыг шинжлэх, шалгах
5. Загварыг сайжруулах

гэсэн 5 алхамтай алгоритмыг хэдэн ч удаа давтаж болно. Эдгээр шатыг товч тодорхойлъё.

1. *Систем тодорхойлох.* Энэ шатанд системийн дотоод ба гадаад хэсгийг ямар хувьсагчаар төлөөлүүлэхийг тогтооно. Системийн дотоод хүчин зүйлсийг төлөөлөх хувьсагчийг *системийн дотоод хувьсагч*, гадаад хэсэг буюу орчны хүчин зүйлсийг төлөөлөх хувьсагчийг *системийн гадаад хувьсагч* гэнэ. Системийн хувьсагчдыг сонгохыг загварчлалын үүднээс *систем тодорхойлох* гэж ойлгож болно.

2. *Загвар томъёолох.* Сонгох загварын төрлөөс шалтгаалж системийн ба загварын хувьсагчдын тоо ялгаатай байж болно. Зохиосон загвараар утга нь тодорхойлогдох хувьсагчийг *дотоод хувьсагч* гэнэ. Загварт утгыг нь урьдчилан тодорхойлсон байдлаар гаднаас өгч болох хувьсагчийг *гадаад хувьсагч* гэнэ. "*Гадаад хувьсагчийн утгын өөрчлөлт дотоод хувьсагчийн утгыг өөрчилнө. Дотоод хувьсагчийн утгын өөрчлөлт гадаад хувьсагчийн утгыг өөрчлөхгүй.*" гэсэн дүрмээр хувьсагчдыг ялгана. Тухайн загварт хугацаа болон бусад хувьсагчаас хамаарахгүй боловч гадаад хувьсагчийн адил системийн төлөв байдалд нөлөөлөх хувьсагчийг *параметр* гэнэ. Параметр бол загвар томъёолох үед загварын хувьсагчдын шинж чанар, урьдчилсан нөхцөлөөс үүсдэг, тодорхой тайлбартай тогтмол хэмжигдэхүүн юм. Хэрэв гадаад хувьсагч ба параметрийн утгыг загварт шууд өгвөл загвар мөн чанараа алдаж, шинжилгээ хийх боломж хомсдоно. Загварын хувьсагчдын шинж чанар, урьдчилсан нөхцөлийг тусгаж тодорхойлсон системийг, математик бүтцээр илэрхийлэхийг *загвар томъёолох* гэнэ. Загварчлалд функц, тэгшитгэл, тэгшитгэлийн систем зэргийг *математик бүтэц* гэдэг. Загвар томъёолох үйл явцын дүнд *математик загвар* буюу *бүтцийн загвар* (*загварын бүтцийн хэлбэр*) үүснэ. Бүтцийн загварыг бүрдүүлэх тэгшитгэлийг *бүтцийн тэгшитгэл* гэнэ. Бүтцийн тэгшитгэл *төлөв байдлын тэгшитгэл*, *адилтгал тэгшитгэл* гэсэн хоёр төрөлтэй байна.

3. *Загварыг шийдэх.* Бүтцийн загвараас дотоод хувьсагчдын утга олохыг загварыг шийдэх гэнэ. Загварыг шийдэх гэдэг нь дотоод хувьсагч бүрийг гадаад хувьсагч ба параметрээс хамаарсан функц хэлбэрээр илэрхийлнэ гэсэн үг юм. Жишээлбэл

$$ax^2+bx+c=0$$

гэсэн бүтцийн тэгшитгэл бүхий тэнцвэрийн загвар

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

гэсэн эмхэтгэсэн квадрат тэгшитгэлтэй ижил шийдтэй байх ба

$$x_1(a,b,c) = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}},$$

$$x_2(a,b,c) = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$$

гэсэн шийдтэй байна. Энэ тохиолдолд загварын шийд хоёр тэгшитгэлтэй байна. Загварын дотоод хувьсагчийн шаардлагатай утга буюу шийдийг илэрхийлж байгаа функцийг *цэгцэлсэн хэлбэрийн тэгшитгэл* гэнэ. Цэгцэлсэн хэлбэрийн тэгшитгэлүүдээс тогтох загварыг *загварын цэгцэлсэн хэлбэр* (*цэгцэлсэн хэлбэрийн загвар*) гэнэ. Цэгцэлсэн хэлбэрийн загварын тэгшитгэлийн тоо ба овор хэмжээ бүтцийн загварынхаас их байх боломжтой. *Муу загвар шийдтэй байж болох боловч, судалж буй системийн талаар юу ч хэлж чадахгүй байж болно.*

4. *Загварыг шинжлэх, шалгах.* Загварыг шийдсэний дараа *бодлого* (*асуудал*) *тодорхойлох шинжилгээ*, *мэдрэмтгий байдлын шинжилгээ* (*sensitivity analysis*), *харьцуулсан статик шинжилгээ* (*comparative statics analysis*) болон шаардагдах бусад шинжилгээ хийнэ. Харьцуулсан статик шинжилгээг мэдрэмтгий байдлын шинжилгээний төрөл гэж үзэж болно. Харьцуулсан статик шинжилгээг цэгцэлсэн хэлбэрийн тэгшитгэлүүд дээр хийнэ. Загварыг хэзээ ч загвараар шалгадаггүй. Загварыг бодит нөхцөл байдлаар шалгана. Бодит байдалд нийцэх загварыг сайн загвар гэх ба сайн загварыг ашиглаж болно. Зарим судалгаанд загварын гадаад хувьсагч ба параметрийн утгыг хэрэглэгдэхгүй байж болно.

5. *Загварыг сайжруулах.* Бодит байдалд нийцээгүй загварыг өргөтгөх эсвэл хялбарчлах замаар 1–р шатнаас эхлэн сайжруулна.

Загвар бодит байдалд нийцэж байвал түүнийг ашиглан прогноз хийж, онош тавьж болно.

Сонгосон загварын төрөл ба системийн онцлогт нийцүүлж, загварчлалын шат бүрийг дотор нь янз бүрээр нарийвчлан задалж болно. Ялангуяа 4–р шат загварын төрлөөс ихээхэн хамаарна. Таван алхамтай энэ алгоритмтай ойролцоо агуулгатай алгоритмыг мөн *систем тодорхойлох* гэж томъёолсон байдаг.

Системийг нэг удаа тодорхойлж, загвар томъёолж, шийдсэнээр төлөв байдал, шинж чанарыг нь бүрэн тодорхойлох боломжгүй. Иймээс системийг танин мэдэхийн тулд загварыг олон удаа өөрчилж тухай бүр шийдэж, шинжилж бодит байдалтай харьцуулна.

Дискрет динамик загварт дотоод хувьсагчийн тухайн үеийн утга өмнөх үеийн утгаар тодорхойлогдох учир хоцролттой дотоод хувьсагчийг гадаад хувьсагч гэж үздэг.

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + u_t$$

гэсэн авто регрессийн тэгшитгэлийн хувьд ε_t дотоод хувьсагч, ε_{t-1}, u_t гадаад хувьсагч, ρ параметр болно. Авто регрессийн тэгшитгэл нь дискрет, стохастик төрлийн загвар юм.

Шинжилгээ ба шалгалтаар $x_1, \ldots, x_k$ хамааралгүй болох нь тогтоогдсон бол шугаман регрессийн загварт y дотоод хувьсагч, $x_1, \ldots, x_k$ гадаад хувьсагч, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$ параметр, ε шинээр нэмсэн стохастик хувьсагч байна. Регрессийн тэгшитгэл

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$$

нь ганц дотоод хувьсагчтай учир загварын бүтцийн ба цэгцэлсэн хэлбэр ижил байна. Ийнхүү шугаман регрессийн загвар анхнаасаа шийдэгдсэн байдаг учир загварчлалын 3–р шатыг алгасч, 4–р шатанд түүнийг хувьсагчдын ажиглалтын утгуудаар шинжилнэ. Энэ шинжилгээгээр коллинеар чанар, алдааны дисперсүүдийн ялгаатай байдал, дотоод чанар (*endogeneity*) илрэх боломжтой ба илэрсэн тохиолдолд загварыг өөрчлөн, параметрийн үнэлэлт байгуулж, бодит нөхцөл байдлаар шалгана. Шугаман регрессийн загварыг шалгасан бол түүгээр проноз хийх тухай ярьж болно.

Шугаман регрессийн загварын үл хамаарах зарим хувьсагч дотоод хувьсагч болох нь тогтоогдвол, бусад гадаад хувьсагчийн хамааран хувьсагчид үзүүлэх нөлөөг үнэн зөв тооцох зорилгоор хэрэгсэл хувьсагч ашигладаг. Шугаман регрессийн загварт үл хамаарах дотоод хувьсагч байна гэдэг нь уг хувьсагч шинжилж буй системийн дотоод хэсэгт хамаарна гэсэн үг юм. Иймээс үл хамаарах дотоод хувьсагчийг тайлбарлах өөр гадаад хувьсагч илрүүлж (утгыг нь ажиглаж), бүтцийн шинэ тэгшитгэл зохионо.

Олон дотоод хувьсагчтай системийг загварчлахын тулд олон тэгшитгэл ашиглах нь ойлгомжтой ба олон тэгшитгэлтэй загварыг нэг агшин дахь тэгшитгэлүүдийн загвар (*simultaneous equations model*, *simultaneous model*) гэнэ.

Сүүлийн жилүүдэд олон дотоод хувьсагчтай регрессийн загвартай холбоотой бүтцийн тэгшитгэлийн загварчлал (*structure equation modeling*) гэсэн эконометрикийн арга хөгжиж байна.

Эконометрикийн загварт хувьсагч хоорондын хамаарлыг параметрийн тусламжаар илэрхийлэх бүтцийн тэгшитгэлийг төлөв байдлын тэгшитгэл гэх ба параметр болон санамсаргүй гишүүн агуулаагүй бүтцийн тэгшитгэлийг адилтгал тэгшитгэл гэнэ.

Загварын шинжилгээний шатанд шинжилгээг хийхдээ ажиглалтын утга *шаардах, үл шаардах* хоёр хэлбэрээр хийнэ.

Загвар зэрэгцээ тэгшитгэлүүдээр өгөгдсөн бол түүний цэгцэлсэн хэлбэрийг олсны дараа, эхлээд ажиглалтын утга үл шаардах шинжилгээ хийнэ. Зэрэгцээ тэгшитгэлүүдийн цэгцэлсэн хэлбэр нь өөр тэгшитгэлүүдийн шийд байх боломжтой. Хувьсагчдын утга үл шаардах шинжилгээгээр загварын бүтцийн хэлбэрийн параметрүүдийн утга цэгцэлсэн хэлбэр дэх параметрүүдийн утгаар нэгэн утгатай тодорхойлогдох эсэхийг шалгана.

Өгөгдлүүд хугацааны бүтэцгүй байх тохиолдолд үл хамааран хувьсагчдын анхны ажиглалтанд хамрагдаагүй шинэ утгуудаар хамааран хувьсагчийг үнэлэх бодлого (прогнозын бодлого) тавигдаж болно. Эконометрикт прогноз хийнэ гэдгийг зөвхөн энэ утгаар ойлгож хамааран хувьсагчийн үнэлэлт байгуулна.

Прогнозлолын асуудал маш олон талтай. Цэгэн ба завсран прогнозлол гэж ялгаж болно. Эхний тохиолдолд тодорхой нэг тоо олох ба сүүлчийн тохиолдолд хувьсагчийн үнэн утгыг өгөгдсөн итгэх түвшинтэй агуулсан завсар байгуулна.

Энэ бүлэгт тайлбарлагч хувьсагчдын утга яг тодорхой эсвэл ойролцоогоор өгөгдөж байгаагаас хамааруулан нөхцөлт бус ба нөхцөлт прогнозлолын тухай өгүүлнэ. Эдгээрээс гадна хугацааны цувааны хувьд прогнозлол алдаа хоорондын авто корреляцтай, авто корреляцгүй тохиолдолд ялгаатай байдгийг харуулна. Одоо прогнозын тухай гол асуудалдаа оръё. Эхлээд

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{8.1}$$

гэсэн сонгодог регрессийн загвар авч үзье. Үүнд, $\boldsymbol{y}$–хамааран хувьсагчийн $n \times 1$–вектор, $\boldsymbol{X}$–үл хамааран хувьсагчийн $n \times k$ матриц, $\boldsymbol{\varepsilon}$–алдааны $n \times 1$–вектор, $\boldsymbol{\beta}$–

параметрийн вектор, $\mathrm{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, $\mathrm{V}(\varepsilon) = \sigma^2$. Үл хамааран хувьсагчдын $\boldsymbol{x}_{n+1} = (x_{n+1,1}, \ldots, x_{n+1,k})'$ ажиглалтын утга олдсон ба түүнд харгалзах хамааран хувьсагч дараах загварыг хангана гэж үзье.

$$y_{n+1} = \boldsymbol{x'_{n+1}}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1} \tag{8.2}$$

Үүнд, $\mathrm{E}(\varepsilon_{n+1}) = 0$, $\mathrm{V}(\varepsilon_{n+1}) = \sigma^2$ байхын зэрэгцээ ε_{n+1} санамсаргүй хэмжигдэхүүн $\boldsymbol{\varepsilon}$–той корреляц хамааралгүй байна. $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_{n+1}})$ гэсэн ажиглалтын утгуудаар y_{n+1}–ийг үнэлье. Энэ үнэлэлтийн онцлог бол өмнөх шиг параметрийг биш, санамсаргүй хэмжигдэхүүнийг үнэлэхэд оршино.

8.1 Нөхцөлт бус прогнозлол

Үнэлэлтэнд хэрэглэх вектор $\boldsymbol{x}_{n+1}$ яг тодорхой мэдэгдэж байх үеийн прогнозыг *нөхцөлт бус прогноз* гэнэ.

β ба σ^2 параметрийн утга мэдэгдэж байна гэж үзье. Тэгвэл y_{n+1} хэмжигдэхүүний үнэлэлт $\widehat{y}_{n+1} = \widehat{y}$–аар

$$\mathrm{E}y_{n+1} = \boldsymbol{x}_{n+1}\boldsymbol{\beta}$$

утгыг авна. Энэ прогнозын дундаж квадрат алдаа

$$\mathrm{E}(y_{n+1} - \widehat{y}) = \mathrm{E}(\varepsilon_{n+1}^2) = \sigma^2.$$

ε_{n+1} хэмжигдэхүүнийг нормал тархалттай гэж үзвэл y_{n+1}–ийн утгыг α магадлалтай агуулах $(\widehat{y} - \sigma t_\alpha, \widehat{y} + \sigma t_\alpha)$ завсар олдоно. t_α–стандарт нормал тархалтын хоёр талт α-квантил.

Бодит амьдралд түгээмэл тохиолдох учир $\boldsymbol{\beta}$ ба σ^2 параметр мэдэгдэхгүй байна гэж үзье. (8.1) загварыг ашиглавал $\boldsymbol{\beta}$ ба σ^2-ын ХБК-үнэлэлт харгалзан

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \qquad s^2 = \boldsymbol{\varepsilon'\varepsilon}/(n-k)$$

байна. Иймээс энэ тохиолдолд y_{n+1}–ийг

$$\widehat{y} = \boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \tag{8.3}$$

хэмжигдэхүүнээр үнэлж болно. (8.3) үнэлэлт хазайлтгүй ба хазайлтгүй шугаман үнэлэлтийн ангид хамгийн бага дундаж квадрат алдаатай гэдгийг хялбар харуулж болно. Сонгодог регрессийн загварт $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}$ хазайлтгүй байдаг учир $\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$ байна. (8.3) хазайлтгүй гэдгийг харуулахын тулд $\mathrm{E}\widehat{y} = \mathrm{E}y_{n+1}$ байхыг харуулна:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\widehat{y} = \mathrm{E}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\mathrm{E}(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon})\\ &= \boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\mathrm{E}\boldsymbol{\beta} + 0 = \boldsymbol{x}'_{n+1}\mathrm{E}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta} = \mathrm{E}y_{n+1}.\end{aligned}$$

Нөгөө талаас (8.2) ёсоор $y_{n+1} = \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1}$ байх тул

$$\mathrm{E}y_{n+1} = \boldsymbol{x}'_{n+1}\mathrm{E}\boldsymbol{\beta} + 0 = \boldsymbol{x}'_{n+1}\mathrm{E}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}.$$

Дээрх дүгнэлтийн хоёр дахь хэсгийг теорем хэлбэрээр томъёолж баталъя.

Теорем 8.1.1. *$\widetilde{y} = \boldsymbol{c'y}$ нь y_{n+1} хэмжигдэхүүний үнэлэлт болог. $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'$ нь ямар нэг вектор. $\widetilde{y}$ хазайлтгүй, өөрөөр хэлбэл*

$$E\widetilde{y} = Ey_{n+1} = \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta} \tag{8.4}$$

байг. Тэгвэл

$$E(\widetilde{y} - y_{n+1})^2 \geq E(\widehat{y} - y_{n+1})^2$$

биелнэ.

Б а т а л г а а: (8.4) ёсоор дурын $\boldsymbol{\beta}$–ийн хувьд $\mathrm{E}\widetilde{y} = \boldsymbol{c'X\beta} = \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}$ байх учир

$$\boldsymbol{c'X} = \boldsymbol{x}'_{n+1}. \tag{8.5}$$

Баталгаанд

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\boldsymbol{yy'}) &= \mathrm{E}[(\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon})'] = \mathrm{E}[(\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{\varepsilon})(\boldsymbol{\beta'X'}+\boldsymbol{\varepsilon}')]\\ &= \mathrm{E}(\boldsymbol{X\beta\beta'X'}) + \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon'}) = \sigma^2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X\beta\beta'X'},\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{yy'}) = \sigma^2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X\beta\beta'X'} \tag{8.6}$$

ба

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}\beta}') &= \mathrm{E}(\boldsymbol{Ayy'A'}) = \boldsymbol{A}\mathrm{E}(\boldsymbol{yy'})\boldsymbol{A'} = \boldsymbol{A}(\sigma^2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X\beta\beta'X'})\boldsymbol{A'}\\ &= \sigma^2\boldsymbol{AA'} + \boldsymbol{AX\beta\beta'X'A'},\\ \boldsymbol{AA'} &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'X}(\boldsymbol{X'X})^{-1} = (\boldsymbol{X'X})^{-1},\\ \boldsymbol{AX} &= (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'X} = \boldsymbol{I},\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}(\widehat{\boldsymbol{\beta}\beta}') = \sigma^2(\boldsymbol{X'X})^{-1} + \boldsymbol{\beta\beta'} \tag{8.7}$$

хамаарлыг хэрэглэх болно.

$\widetilde{y}$ үнэлэлтийн алдааны квадрат дунджийг

$$\mathrm{E}(\widetilde{y}-y_{n+1})^2 = \mathrm{E}(\widetilde{y}-\widehat{y}+\widehat{y}-y_{n+1})^2 = \mathrm{E}(\widetilde{y}-\widehat{y})^2+2\mathrm{E}(\widetilde{y}-\widehat{y})(\widetilde{y}-y_{n+1})+\mathrm{E}(\widehat{y}-y_{n+1})^2 \tag{8.8}$$

гэж бичиж болно. (8.8)–ийн хувьд

$$\mathrm{E}(\widetilde{y} - \widehat{y})(\widetilde{y} - y_{n+1}) = 0$$

байна гэдгийг харуулъя.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\widetilde{y} - \widehat{y})(\widetilde{y} - y_{n+1}) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{c'yx}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \mathrm{E}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \mathrm{E}[\boldsymbol{c'y}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1})]\\ &\quad + \mathrm{E}[\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1})]\end{aligned} \tag{8.9}$$

гэж задарна. 1–р нэмэгдэхүүн:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\boldsymbol{c'yx}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{c'yx}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{x}_{n+1})\\ &= \boldsymbol{c}'\mathrm{E}(\boldsymbol{yy'})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}\\ &\underbrace{}_{(8.8)}\\ &= \boldsymbol{c}'(\sigma^2\boldsymbol{I} + \boldsymbol{X\beta\beta'X'})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}\\ &\underbrace{}_{(8.5)}\\ &= \sigma^2\boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1} + \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{X\beta\beta'x}_{n+1}.\end{aligned}$$

2–р нэмэгдэхүүн:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) &= \boldsymbol{x}'_{n+1}\mathrm{E}(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}')\boldsymbol{x}_{n+1}\\ &= \boldsymbol{x}'_{n+1}(\sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}')\boldsymbol{x}_{n+1}\\ &= \sigma^2\boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}+\boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{n+1}.\end{aligned}$$

3–р нэмэгдэхүүн:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\boldsymbol{c}'\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}+\varepsilon_{n+1})] &= \boldsymbol{c}'\mathrm{E}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{n+1}\\ &= \boldsymbol{c}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{n+1}\\ &\underbrace{(8.5)}\\ &= \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{n+1}.\end{aligned}$$

4–р нэмэгдэхүүн:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}+\varepsilon_{n+1})] &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}+\varepsilon_{n+1}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{n+1})\\ &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\varepsilon)\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{n+1})\\ &= \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{n+1}.\end{aligned}$$

Эдгээр дөрвөн үр дүнг (8.9)–д тавибал тэг гарна. Иймээс (8.8)–ыг

$$\mathrm{E}(\widetilde{y}-y_{n+1})^2 = \mathrm{E}(\widetilde{y}-\widehat{y})^2+\mathrm{E}(\widehat{y}-y_{n+1})^2 \geq \mathrm{E}(\widehat{y}-y_{n+1})^2$$

гэж бичиж болох тул теорем батлагдана.

Одоо прогнозын алдааны квадрат дундаж

$$\mathrm{E}(\widetilde{y}-y_{n+1})^2 = \sigma^2(1+\boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}) \tag{8.10}$$

байхыг харуулъя.

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\widehat{y}-y_{n+1})^2 &= \mathrm{E}(\widehat{y}^2-2\widehat{y}y_{n+1}+y_{n+1}^2)\\ &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}\widehat{\beta}'}\boldsymbol{x}_{n+1}-2\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}+\varepsilon_{n+1})+(\boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}+\varepsilon_{n+1})^2)\\ &= \boldsymbol{x}'_{n+1}(\sigma^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}')\boldsymbol{x}_{n+1}-2\boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{n+1}+\boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{x}_{n+1}+\sigma^2\\ &= \sigma^2\boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}+\sigma^2\\ &= \sigma^2(1+\boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}).\end{aligned}$$

σ^2–ыг s^2 үнэлэлтээр нь солиод

$$\delta = \sqrt{s^2(1+\boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1})}$$

гэе.

§ 3.5–д хэрэглэсэн үндэслэлийг ашиглан $(\varepsilon, \varepsilon_{n+1})$ алдаанууд хамтын нормал тархалттай байхад $(\widehat{y}-y_{n+1})/\delta$ санамсаргүй хэмжигдэхүүн $n-k$ чөлөөний зэрэг бүхий Стьюдентийн тархалттай гэдгийг тогтоож болно. Иймээс y_{n+1}–ийн α итгэх түвшин бүхий итгэх завсар $(\widehat{y}-\delta t_\alpha, \widehat{y}+\delta t_\alpha)$ байна. Энд $n-k$ чөлөөний зэрэг бүхий Стьюдентийн тархалтын хоёр талт α-квантилийг t_α гэж тэмдэглэсэн болно.

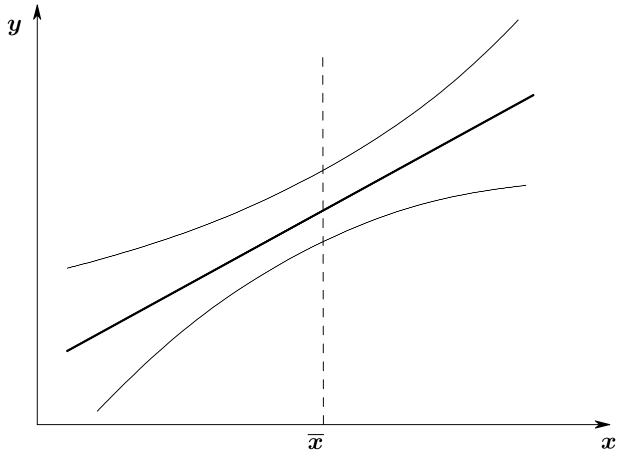
Систем (8.1)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n$$

хэлбэртэй байхад (8.10) томъёо

$$\mathrm{E}(\widehat{y} - y_{n+1})^2 = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}\right) \tag{8.11}$$

хэлбэртэй болно гэдгийг харж болно ($\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_t$). (8.11)–ээс прогнозын дундаж квадрат алдаа $x_{n+1} = \bar{x}$ үед хамгийн бага байх ба $\bar{x}$–ээс x_{n+1} холдох тутам харгалзах итгэх завсар өргөсөх нь мөрдөн гарна (Зураг 8.1).



Зураг 8.1:

8.2 Нөхцөлт прогнозлол

Өмнө үл хамааран хувьсагчийн вектор $\boldsymbol{x}_{n+1}$ мэдэгдэж байна гэж үзсэн. Гэвч практикт $\boldsymbol{x}_{n+1}$ алдаа агуулах тохиолдол байдаг. Тухайлбал хугацааны цуваагаар прогноз хийхэд үл хамааран хувьсагчдын утгыг прогнозолдог учир жинхэнэ утгаас гажсан утганд хүрэхээс зайлсхийх боломжгүй байдаг. Иймээс энд нөхцөлт прогнозын бодлого авч үзье. (8.1), (8.2) биелж байвч, $\boldsymbol{x}_{n+1}$ вектор алдаатай ажиглагддаг гэе.

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}_{n+1} + \boldsymbol{u}, \tag{8.12}$$

$\boldsymbol{u}$ нь $\boldsymbol{\varepsilon}$, ε_{n+1}–ээс үл хамааран $k \times 1$ санамсаргүй вектор, $\mathrm{E}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, $\mathrm{V}\boldsymbol{u} = \sigma_{\boldsymbol{u}}^2 \boldsymbol{I}$. Энэ тохиолдолд (8.3) прогноз

$$\widehat{y} = \boldsymbol{z}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} \tag{8.13}$$

хэлбэрт шилжинэ. Прогнозын алдааг

$$\boldsymbol{e} = \widehat{y} - y_{n+1}$$

гэвэл $\boldsymbol{u}$, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ хамааралгүй ба $\mathrm{E}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ учир

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\boldsymbol{e} &= \mathrm{E}(\boldsymbol{z}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta} = \mathrm{E}[(\boldsymbol{x}_{n+1} + \boldsymbol{u})'\widehat{\boldsymbol{\beta}}] - \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta} \\ &= \mathrm{E}(\boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}}) + \mathrm{E}(\boldsymbol{u}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}) - \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta} = 0.\end{aligned}$$

Энэ нь (8.13) үнэлэлт хазайлтгүй гэдгийг харуулна. Мөн

$$\mathrm{E}\boldsymbol{e}^2 = \sigma^2(1 + \boldsymbol{x}'_{n+1}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_{n+1}) + \sigma^2_{\boldsymbol{u}}\mathrm{tr}((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}) + \sigma^2_{\boldsymbol{u}}\widehat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{\beta} \tag{8.14}$$

байхыг харуулж болно (дасгал болгож үлдээе).

Иймээс үл хамааран хувьсагч алдаатай үед прогнозын алдаа (8.10)–д $\sigma^2_{\boldsymbol{u}}$ дисперстэй пропорциональ хоёр шинэ эерэг нэмэгдэхүүн нэмэгдэнэ.

Нөхцөлт прогнозын тохиолдолд y_{n+1}–ийн итгэх завсрыг нөхцөлт бус прогнозын адилаар хялбар байгуулах боломжгүй. Энэ нь $\boldsymbol{\varepsilon}$, ε_{n+1}, $\boldsymbol{u}$ алдаанууд нормал тархалттай үед $\widehat{y}$ үнэлэлт нормал тархалттай хамааралгүй хоёр векторын скаляр үржвэр болдогтой холбоотой. Ийнхүү итгэх завсрыг аналитик хэлбэрээр олох боломжгүй боловч ойролцоогоор олох тоон арга байдаг.

8.3 Алдаа авторегресстэй үед прогнозлох

(8.1),(8.2) гэсэн хугацааны бүтэцгүй загварыг хугацааны бүтэцтэй гэж үзээд алдаа хугацааны хувьд корреляц хамааралтай байх тохиолдлыг авч үзье. Энэ тохиолдолд

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \nu_t, \quad t = 1, \ldots, n,\ n+1 \tag{8.15}$$

гэсэн 1–р эрэмбийн авторегрессийн процесс авч үзэх шаардлага гарна. Үүнд, $\{\nu_t,\ t = 1, \ldots, n, n+1\}$ хамааралгүй, нормал тархалттай санамсаргүй хэмжигдэхүүний дараалал бөгөөд $\mathrm{E}(\nu_t) = 0$, дисперс σ^2_ν тогтмол, $|\rho| < 1$. Прогнозыг сайжруулахын тулд (8.15) гэсэн алдааны тухай мэдээллийг хэрхэн ашиглаж болохыг харуулъя. Анх авч үзсэний адилаар $\boldsymbol{\beta}$ ба ρ параметрийг мэдэгдэж байна гэж үзье. y_{n+1}–ийн үнэлэлтээр

$$\widehat{y} = \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta} + \rho\varepsilon_n = \boldsymbol{x}'_{n+1}\boldsymbol{\beta} + \rho(y_n - \boldsymbol{x}'_n\beta) \tag{8.16}$$

хэмжигдэхүүнийг авъя. Энэ тохиолдолд

$$\boldsymbol{e} = y_{n+1} - \widehat{y} = \nu_{n+1}$$

алдаанаас $\mathrm{E}\boldsymbol{e} = 0$ ба

$$\mathrm{E}\boldsymbol{e}^2 = \sigma^2_\nu = (1 - \rho^2)\sigma^2_\varepsilon \tag{8.17}$$

мөрдөн гарахыг хялбар харуулж болно: (8.15) ёсоор $\mathrm{E}\nu_{n+1} = 0$ учир $\mathrm{E}\boldsymbol{e} = \mathrm{E}\nu_{n+1} = 0$ ба $\mathrm{E}\boldsymbol{e}^2 = \mathrm{E}\nu^2_{n+1}$. (8.15) нь $\varepsilon_{n+1} = \rho\varepsilon_n + \nu_{n+1}$ тохиолдлыг агуулах учир

$$\nu_{n+1} = \varepsilon_{n+1} - \rho\varepsilon_n$$

биелнэ. Иймээс

$$\mathrm{E}\boldsymbol{e}^2 = \mathrm{E}\nu^2_{n+1} = \mathrm{E}(\varepsilon_{n+1} - \rho\varepsilon_n)^2 = \sigma^2_\nu.$$

Өмнө $\sigma^2_\varepsilon = \sigma^2_\nu/(1 - \rho^2)$ байхыг тогтоосон ба үүнийг $\sigma^2_\nu = \sigma^2_\varepsilon(1 - \rho^2)$ гэж бичиж болох тул (8.17) биелнэ. Ийм байдлаар прогнозын алдааг багасгах боломжтой. Энэ нь алдаа корреляцгүй байх тохиолдолд боломжгүй юм.

Бодит байдалд регрессийн параметрүүд мэдэгдэхгүй байдаг учир y_{n+1} хэмжигдэхүүнийг прогнозлохдоо (8.16) томъёонд $\boldsymbol{\beta}$ ба ρ–г хугацааны корреляцид хэрэглэслэсэн аргуудын аль нэгээр гаргаж авсан үнэлэлтээр нь солино. Жишээлбэл

$$\widehat{y} = \boldsymbol{x}'_{n+1}\widehat{\boldsymbol{\beta}} + r(y_n - \boldsymbol{x}'_n\widehat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{8.18}$$

үнэлэлт ашиглаж болно.

Прогнозын дундаж квадрат алдааны аналитик илэрхийлллийг олох боломжгүй. Практикт (8.17) томъёог хэрэглэхдээ σ_ν^2–ийг (6.11), (6.12) регрессээс гаргаж авсан үнэлэлтээр нь солидог.

Дүгнэлт:

1. (8.1), (8.2) загвар дахь хэмжигдэхүүний прогноз $\widehat{y}$ нь (8.3) тэнцэтгэлээр өгөгдөх ба $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ нь $\boldsymbol{\beta}$ векторын (8.1) регрессээр гарган авсан ХБК-үнэлэлт.

2. Энэ үнэлэлт y_{n+1} хэмжигдэхүүний хазайлтгүй шугаман үнэлэлтийн ангид хамгийн бага дундаж квадрат алдаатай байна.

3. Прогнозын дундаж квадрат алдаа нь (8.10) тэнцэтгэлээр тодорхойлогдоно.

4. Үл хамааран хувьсагчид алдаатай байх үед прогнозын алдаа (8.14) томъёогоор өснө.

5. (8.1), (8.2) загварын алдаа 1–р эрэмбийн авторегрессийн процесс үүсгэдэг бол томъёо (8.18)–ыг ашиглаж прогнозын алдааг багасгаж болно.

8.4 Бататгах дасгал, бодлого

Бодлого 8.1. $y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t,\ \ t = 1, \dots, 10$ гэсэн хос регрессийн загварын хувьд

$$\sum y_t = 8,\quad \sum x_t = 40,\quad \sum y_t^2 = 26,\quad \sum x_t^2 = 200,\quad \sum x_t y_t = 20$$

мэдэгдэж байгаа ба тодорхой s–р ажиглалтын утга $x_s = 10$ байг. $x_s = 10$ өгөгдсөн загварыг хангана гэж үзээд

а) y_s хэмжигдэхүүний хамгийн сайн, хазайлтгүй, шугаман прогнозыг ол;

б) Прогнозын стандарт алдааг үнэл.

Бодолт. а) Үнэлэлтийн чанар ёсоор

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{t=1}^n x_t y_t - n\overline{x} \cdot \overline{y}}{\sum_{t=1}^n x_t^2 - n\overline{x}^2} = \frac{20 - 10 \cdot 4 \cdot 0.8}{200 - 10 \cdot 4^2} = -0.3$$
$$\hat{\alpha} = \overline{y} - \hat{\beta}\overline{x} = 0.8 + 0.3 \cdot 4 = 2$$

Онол ёсоор (томъёо (8.3)–ыг харна уу)

$$y_s = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_s = 2 - 0.3 \cdot 10 = -1$$

б) Өгөгдсөн загварын хувьд үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэр ESS–ийг олъё. $\sum_{t=1}^n e_t = 0$ ба $\sum_{t=1}^n x_t e_t = 0$ байхыг харгалзвал

$$\begin{aligned} \mathrm{ESS} &= \sum e_t^2 = \sum e_t(y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t) = \sum e_t y_t = \sum (y_t - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_t) y_t \\ &= \sum y_t^2 - \hat{\alpha}\sum y_t - \hat{\beta}\sum x_t y_t = 26 - 2 \cdot 8 + 0.3 \cdot 20 = 16. \end{aligned}$$

Алдааны дисперсийн үнэлэлт ёсоор

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\text{ESS}}{n-2} = \frac{16}{8} = 2.$$

Прогнозын алдааны дундаж квадрат үнэлэлт (8.11) томъёогоор

$$\begin{aligned}\delta &= \sigma^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_s - \bar{x})^2}{\sum(x_t - \bar{x})^2}\right)\\ &= 2\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{(10-4)^2}{200 - 10\cdot 4^2}\right) = 4.\end{aligned}$$

Иймээс прогнозын стандарт алдааны үнэлэлт 2 байна.

Бодлого 8.2. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{y}$ –$n \times 1$ вектор, $\boldsymbol{X}$ –$n \times k$ матриц) гэсэн стандарт шугаман загварыг ердийн хамгийн бага квадратын аргаар үнэлье. y_0, $\boldsymbol{x}_0' = (x_{01}, \ldots, x_{0k})$ нь нэмэлт ажиглалт болог. Энэ ажиглалт өгөгдсөн загварыг хангах тухай асуултанд ямар статистик ашиглаж хариулах вэ?

Бодолт. Нэмэлт ажиглалт өгөгдсөн загварыг хангах тохиолдолд

$$t = \frac{\hat{y}_0 - y_0}{\delta}$$

статистик $n-k$ чөлөөний зэрэг бүхий Стьюдентийн тархалттай байна. Үүнд, $\hat{y}_0 - y_0$–ийн прогноз, δ–прогнозын стандарт алдааны үнэлэлт,

$$\delta = \sqrt{s^2(1 + \boldsymbol{x}_0'(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{x}_0}.$$

Дээрх үг дүнг ашиглан асуултанд хариулъя. Итгэх түвшин α–ийн хувьд t статистикийн утгыг олъё. Нэмэлт ажиглалт өгөгдсөн загварыг хангана гэсэн тэг таамаглал $|t| > t_{1-\alpha/2}(n-k)$ үед няцаагдах ба $|t| \le t_{1-\alpha/2}(n-k)$ үед зөвшөөрөгдөнө. Энд $t_{1-\alpha/2}(n-k)$ нь $n-k$ чөлөөний зэрэг бүхий Стьюдентийн тархалтын хоёр талт $(1-\alpha/2)$-квантил.

Бодлого 8.3. (8.10) томъёог дахин шалга.

Бодлого 8.4. (8.11) тэнцэтгэлийг батал.

Бодлого 8.5. Сонгодог регрессийн загвар $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{y}$–$n \times 1$ вектор, $\boldsymbol{X}$–$n \times k$ матриц, $\boldsymbol{\varepsilon}$ алдааны $n \times 1$ вектор, $\boldsymbol{\beta}$ коэффициентийн $k \times 1$ вектор, $\mathrm{E}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$, $\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$) өгөгдсөн байг. $\boldsymbol{x}_{n+1} = (x_{n+1,1}, \ldots, x_{n+1,k})'$ үл хамааран хувьсагчдын нэмэлт ажиглалтын утга ба $y_{n+1} = \boldsymbol{x}_{n+1}'\boldsymbol{\beta} + \varepsilon_{n+1}$ болог. Хэрэв $\boldsymbol{X}$ тогтмол агуулах ба $x_{n+1,j}$ бүр $\boldsymbol{X}$–ийн j–р баганын дундажтай тэнцүү бол прогнозын алдаа хамгийн бага байна гэдгийг харуул.

Бүлэг 9

Хэрэгсэл хувьсагчид

§ 5.1 хэсэгт стохастик регрессортой загварын хувьд үл хамаарах хувьсагчид нь алдаатайгаа корреляцтай үед хамгийн бага квадратын аргаар үнэлсэн үнэлэлтүүд хазайлттай, зохимжтой биш байж болдгийг дурдсан билээ. Эдгээр хүндрэлээс гарах аргуудын нэг нь хэрэгсэл хувьсагч гэж нэрлэгдэх өөр үл хамаарах хувьсагч ашиглах явдал юм. Хазайлтгүй үнэлэлт гаргаж авахын тулд дараах 2 чанарыг хангасан байх шаардлагатай.

1. Шинэ хувьсагчид өгөгдсөн үл хамаарах хувьсагчидтай сайн корреляц хамааралтай байх,
2. Шинэ хувьсагчид алдаа бүртэй корреляц хамааралгүй байх.

9.1 Хэрэгсэл хувьсагчдын тусламжтай олсон үнэлэлт зохимжтой болох нь

Өгөгдсөн загвар

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.1}$$

тэгшитгэлээр дүрслэгддэг байг. Үүнд: $\boldsymbol{y}$–хамааран хувьсагчийн $n \times 1$ вектор; $\boldsymbol{X}$–үл хамаарах хувьсагчийн $n \times k$ матриц; $\boldsymbol{\varepsilon}$–алдааны $n \times 1$ вектор; $\boldsymbol{\beta}$–параметрүүдийн $k \times 1$ вектор. Түүнчлэн $\boldsymbol{Z}$–хэрэгсэл хувьсагчдын $n \times k$ матриц өгөгдсөн. $k \times k$ хэмжээст $\boldsymbol{Z'X}$ матриц урвуутай гэе. Тэгвэл

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = (\boldsymbol{Z'X})^{-1}\boldsymbol{Z'y} \tag{9.2}$$

үнэлэлтийг *хэрэгсэл хувьсагчдын (Instrumental variables)* тусламжтайгаар олсон $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн үнэлэлт гэнэ. Энэ үнэлэлтийг

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = (\boldsymbol{Z'Z})^{-1}\boldsymbol{Z'y}$$

хэлбэрт биш чухам яагаад (9.2) хэлбэртэй авсныг харуулъя. (9.1)–ийг (9.2)–д орлуулбал:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = (\boldsymbol{Z'X})^{-1}\boldsymbol{Z'}(\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{Z'X})^{-1}\boldsymbol{Z'\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + \left(\frac{1}{n}(\boldsymbol{Z'X})\right)^{-1}\frac{1}{n}\boldsymbol{Z'\varepsilon} \tag{9.3}$$

$\boldsymbol{X}$ ба $\boldsymbol{Z}$ нь сайн корреляц хамааралтай гэдгийг формалиар илэрхийлэх дараах нөхцөл биеэлдэг гэе.

$n \to \infty$ үед $(1/n)(\boldsymbol{Z'X})$ матрицуудын дараалал ямар нэг үл бөхөх матриц руу магадлалаараа нийлнэ. (9.4)

$\boldsymbol{Z}$ ба $\boldsymbol{\varepsilon}$ корреляц хамааралгүй учраас $(1/n)\boldsymbol{Z'\varepsilon}$ гишүүн магадлалаараа тэг рүү нийлнэ. ($\boldsymbol{Z}$ ба $\boldsymbol{\varepsilon}$ корреляц хамааралгүй гэдгийг $\boldsymbol{p}\lim \frac{1}{n}\boldsymbol{Z'\varepsilon} = 0$ гэсэн илүү сул нөхцлөөр сольж болно.) (9.3)–аас $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ үнэлэлт зохимжтой болох нь мөрднө. Ерөнхий тохиолдолд $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ нь хазайлттай, ковариацийн матриц нь минимал байх нөхцлийг хангахгүй болохыг тэмдэглэе. Өөрөөр хэлбэл, $\boldsymbol{Z}$–ээс илээр хамаарах учраас эрчимтэй биш.

9.2 Хэмжилтийн алдааны нөлөө

Хэрэгсэл хувьсагчийг ашиглахад хэмжилтийн алдаа нөлөөлөх эсэхийг авч үзье.

Хамааран хувьсагчийн хэмжилтийн алдаа: (9.1) загвар үнэн боловч хамааран хувьсагч $\boldsymbol{y}$ нь $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}$ хэлбэртэй, $\boldsymbol{u}$ алдаатай ажиглагдсан гэж үзье. $\mathrm{E}(\boldsymbol{u}) = 0$ бөгөөд $\boldsymbol{u}$ нь $\boldsymbol{X}$ ба $\boldsymbol{\varepsilon}$–оос үл хамаардаг байг. Тэгвэл загвар $\boldsymbol{y}^* = \boldsymbol{X\beta} + (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{u})$ хэлбэртэй болох ба $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ $\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ тул $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн үнэлэлт хазайлтгүй, зохимжтой байна. Эндээс, хэмжилтийн алдаа нь зөвхөн $\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{u}) = \sigma^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \sigma^2(\boldsymbol{u})$ дисперсийг ихэсгэхэд хүргэж байна.

Үл хамаарах хувьсагчийн хэмжилтийн алдаа: Өмнөхийн адилаар, үл хамаарах хувьсагч нь $\boldsymbol{V}$ алдаатай ажиглагдсан гэе ($\boldsymbol{X}^* = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{V}$). Алдааны матриц $\boldsymbol{V}$–ийн математик дундаж тэгтэй тэнцүү, $\boldsymbol{\varepsilon}$–оос үл хамаардаг байг. Тэгвэл регрессорууд ба алдаа нь корреляц хамаарал бүхий дараах регресс үүснэ:

$$\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{V})\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta} + (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{V\beta}) = \boldsymbol{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*,$$
$$\mathrm{E}(\boldsymbol{X}^{*'}\boldsymbol{\varepsilon}^*) = \mathrm{E}[(\boldsymbol{X'} + \boldsymbol{V'})(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{V\beta})] = -\mathrm{E}(\boldsymbol{V'V})\boldsymbol{\beta}.$$

Энэ нь ерөнхийдөө ХБК-үнэлэлтүүд хазайлтай, зохимжтой биш болохыг илэрхийлж байна. Үл хамаарах болон хамааран хувьсагчид хоёулаа алдаатай хэмжигдсэн ерөнхий тохиолдолд мөн ийм үр дүнд хүрнэ.

9.3 Хамгийн бага квадратын хоёр алхамт харга

Шаардлагатай хэрэгсэл хувьсагчдыг олох нь хялбар биш бодлого бөгөөд зөвхөн тухайн бодлоготойгоо уялдуулан сонгон авдаг болохыг тэмдэглэе. Хэрэгсэл хувьсагчдыг сонгон авч хамгийн бага квадратын аргаар үнэлэх аргыг *хамгийн бага квадратын хоёр алхамт арга* гэнэ. Энэ аргаар үнэлэхийн тулд хэрэгсэл хувьсагчийн тоо нь үл хамаарах хувьсагчийн тооноос багагүй байхыг шаардахад хангалттай. Энэ тохиолдолд, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ –томъёог гаргая. $\boldsymbol{Z}$ нь шугаман хамааралгүй баганууд бүхий ($rank(\boldsymbol{Z}) = m$) $m \geq k$ байх $n \times m$ хэмжээст матриц байг. $\boldsymbol{X_{n\times k}}$ матрицын

$\boldsymbol{x}_j(j=\overline{1,k})$ багана бүрийн хувьд $\boldsymbol{x}_j$–ийн $\boldsymbol{Z}$ дээрх регрессийг бодож $\widehat{\boldsymbol{x}}_j$ –прогнозын утгуудыг гарган авна:

$$\widehat{\boldsymbol{x}}_j = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{x}_j,\ j=\overline{1,k} \quad \text{буюу} \quad \widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}.$$

Дараа нь $\widehat{\boldsymbol{x}}_j$ утгуудыг шинэ үл хамааран хувьсагч мэтээр авч $\boldsymbol{y}$–ийн $\widehat{\boldsymbol{x}}_j$ дээрх ердийн регрессийг байгуулах замаар $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ үнэлэлтийг олно.

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = (\widehat{\boldsymbol{X}'\widehat{X}})^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}'}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} \tag{9.5}$$

Ийнхүү $\widehat{\boldsymbol{x}}_j$–прогнозын утгууд болон $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$–үнэлэлтийг олоход хамгийн бага квадратын аргыг 2 удаа хэрэглэж буй учраас “хоёр алхамт арга” хэмээн нэрлэгдэж байгаа юм. Манай тохиолдолд $\widehat{\boldsymbol{X}}$ матрицыг гүйцэд k рангтай гэж үзнэ ($\mathrm{rank}\widehat{\boldsymbol{X}}=k$). Эндээс үзвэл $m \geq k$ гэсэн нөхцөл хэрэгсэл хувьсагчдыг ашиглах зайлшгүй нөхцөл болж байна.

Өмнө авч үзсэн (9.4)–нөхцөлтэй төстэй дараах хоёр нөхцөл:

1) $n \to \infty$ үед $(1/n)\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}$ матрицуудын дараалал гүйцэд k рангтай ямар нэг матриц руу магадлалаараа нийлнэ,

2) $n \to \infty$ үед $(1/n)\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}$ матрицуудын дараалал ямар нэг үл бөхөх матриц руу магадлалаараа нийлнэ

биеэлж байвал (9.5) үнэлэлт зохимжтой болохыг харуулж болно.

9.4 Хаусманы тест

Хэрэгсэл хувьсагчдыг ашиглах уу? эсвэл ердийн хамгийн бага квадратын аргыг хэрэглэхэд хангалттай юу гэсэн асуулт гарна. Энэ асуултын хариулт нь:

$\mathbf{H}_0 : p\lim(1/n)\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}=0$ таамаглалыг $\mathbf{H}_1 : p\lim(1/n)\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\neq 0$ өрсөлдөгч таамаглалын нөхцөлд шалгахтай эквивалент юм. Энэ таамаглалыг зөвхөн $\boldsymbol{y};\boldsymbol{X}$ ажиглалтуудаар шалгах боломжгүй учраас ХБК-үнэлэлт $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1=\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{OLS}}$–ээс гадна зарим нэг хэрэгсэл хувьсагчийн тусламжтай олсон $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2=\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ үнэлэлтийг ашиглана. $\mathbf{H}_0$ таамаглалын нөхцөлд $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1$ үнэлэлт зохимжтой, эрчимтэй байх ба харин өрсөлдөгч таамаглал $\mathbf{H}_1$–ийн хувьд зохимжтой биш байна. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2$–үнэлэлт аль ч таамаглалын нөхцөлд зохимжтой байна. Иймд $\mathbf{H}_0$ таамаглалын нөхцөлд $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2-\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1$ ялгавар тэг рүү тэмүүлэх ба нормчилсны дараа энэхүү ялгаврын тархалт нь хязгаартаа ямар нэг тодорхой тархалт руу нийлнэ. Үнэхээр, хязгаарын тохиолдолд $\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2)-\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1)=\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2)-\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1)$ байх ба $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2-\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1)'(\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2)-\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1))^{-1}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2-\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1)$ хэмжигдэхүүн k чөлөөний зэрэг бүхий хи-квадрат тархалт руу нийлдэг болохыг Хаусман (Hausman 1978) баталжээ.

Дүгнэлт:

1. Үл хамаарах хувьсагчид ба алдаа корреляц хамааралтай үед ХБК- үнэлэлт хазайлттай бөгөөд зохимжтой биш. Зохимжтой үнэлэлт гарган авахын тулд хэрэгсэл хувьсагчдыг ашиглаж болно.

2. Хэрэгсэл хувьсагчдын тоо нь үл хамаарах хувьсагчдын тооноос багагүй байна.

3. Хэрэгсэл хувьсагчид нь регрессийн алдаатай корреляц хамааралгүй, харин үл хамаарах хувьсагчидтай корреляц хамааралтай байх ёстой. Энэ тохиолдолд, $\widehat{\beta}_{IV}$ зохимжтой боловч эрчимтэй үнэлэлт болж чадахгүй.

4. Хамааран хувьсагч нь алдаатай хэмжигдсэн үед ХБК-үнэлэлт хазайлттай зохимжтой байна. Үл хамаарах хувьсагч нь алдаатай хэмжигдсэн үед регрессорууд ба алдаа корреляц хамааралтай болоход хүрч ХБК-үнэлэлт зохимжтой биш болно.

9.5 Бататгах дасгал, бодлого

Бодлого 9.1. Хамгийн бага квадратын хоёр алхамт аргаар үнэлсэн

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{IV}} = (\widehat{\boldsymbol{X}'\widehat{X}})^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}'}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$$

томьёог шалга ((9.5) үз).

Бодолт. $\widehat{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}$ гэдгээс

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} &= (\widehat{\boldsymbol{X}'}\widehat{\boldsymbol{X}})^{-1}\widehat{\boldsymbol{X}'}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}\\ &= (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{\boldsymbol{-1}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}.\end{aligned}$$

Бодлого 9.2. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$ үнэлэлт $m = k$ үед $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$ үнэлэлттэй ((9.2)–ыг үз) давхцахыг батал.

Бодолт. $m = k$ үед $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}$ матриц үл бөхөх квадрат матриц болно. Иймээс $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$.

Бодлого 9.3. (9.2) ба (9.5) үнэлэлтүүдийн хувьд $\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV})$–г ол.

Бодолт. Эхлээд $\boldsymbol{Z}$ ба $\boldsymbol{X}$ нь санамсаргүй биш байх тохиолдлыг авч үзье.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}) &= \mathrm{V}\left((\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}\right)\\ &= \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\mathrm{V}(\boldsymbol{y})\\ &\times \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} = \sigma^2\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\\ &\times \boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\\ &= \sigma^2\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

$\boldsymbol{X}$ нь санамсаргүй биш тохиолдолд регрессорууд ба алдааны корреляц хамаарлын тухай асуудал яригдахгүй тул хэрэгсэл хувьсагч оруулах арга шаардалгагүй. Одоо $\boldsymbol{X}$ ба $\boldsymbol{Z}$ нь санамсаргүй матрицууд байх тохиолдлыг авч үзье. Энэ тохиолдолд зөвхөн алдааны ковариацийн асимптотлог матрицыг (хязгаарын тохиолдлыг) олж чадна. Хэрэгсэл хувьсагчийн дараах стандарт урьдчилсан нөхцлүүдийг тавья:

1. $\boldsymbol{p}\lim(1/n)\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{0}$ хязгаар оршино.
2. k гэсэн хамгийн их рангтай төгсгөлөг матриц $\boldsymbol{p}\lim(1/n)\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}$ олдоно.

3. Эерэг тодорхойлогдсон, төгсгөлөг матриц $\boldsymbol{p}\lim(1/n)\boldsymbol{Z'Z}$ олдоно.
Ерөнхий тохиолдолдлыг авч үзье. $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z'Z})^{-1}\boldsymbol{Z'}$ гэж тэмдэглэвэл

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = \left(\boldsymbol{X'PX}\right)^{-1}\boldsymbol{X'Py} = \boldsymbol{\beta} + \left(\boldsymbol{X'PX}\right)^{-1}\boldsymbol{X'P\varepsilon}.$$

Дараах хязгаар орших бөгөөд 1.–3. нөхцлүүдээс эерэг тодорхойлогдсон матрицтай тэнцүү болох нь мөрднө:

$$\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'PX}\right) = \boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'Z}\right)\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z'Z}\right)^{-1}\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z'X}\right).$$

Мөн

$$\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'P\varepsilon}\right) = \boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'Z}\right)\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z'Z}\right)^{-1}\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z'\varepsilon}\right) = \boldsymbol{0}.$$

Эндээс:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}\lim\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}\right) &= \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{p}\lim\left((\boldsymbol{X'PX})^{-1}\boldsymbol{X'P\varepsilon}\right)\\ &= \boldsymbol{\beta} + \left(\boldsymbol{p}\lim\frac{1}{n}\boldsymbol{X'PX}\right)^{-1}\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'P\varepsilon}\right) = \boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

Ийнхүү $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ үнэлэлтийг зохимжтой гэж баталлаа. Нэмэлт болгож, хязгаарын гол теоремийг хангах $n^{-1/2}\boldsymbol{Z'\varepsilon}$ дарааллыг авъя (тухайлбал, $\boldsymbol{Z}$ санамсаргүй биш үед энэ нөхцөл биелнэ). Хэрэгсэл хувьсагчдаар үнэлэгдэж байгаа $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ үнэлэлт хязгаартаа хэвийн тархалттай учир

$$\begin{aligned}\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} - \boldsymbol{\beta}) &= \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'PX}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{X'P\varepsilon}\right)\\ &= \left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'PX}\right)^{-1}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'Z}\right)\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z'Z}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{Z'\varepsilon}\right)\end{aligned}$$

вектор хязгаартаа

$$\sigma^2\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'PX}\right)^{-1} = \sigma^2\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'Z}(\boldsymbol{Z'Z})^{-1}Z'X\right)^{-1}$$

ковариацийн матриц бүхий хэвийн тархалттай байна. Тухайн тохиолдолд (9.2) ёсоор: Ижил хэмжээстэй $\boldsymbol{Z}$ ба $\boldsymbol{X}$ матрицын хувьд:

$$(\boldsymbol{X'PX})^{-1} = (\boldsymbol{Z'X})^{-1}\boldsymbol{Z'Z}(\boldsymbol{X'Z})^{-1}$$

тэнцэтгэл биелэх бөгөөд $\boldsymbol{Z'X}$ нь үл бөхөх квадрат матриц болно. Тэгвэл ковариацийн асимптотлог матриц нь дараах хэлбэртэй байна:

$$\sigma^2\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z'X}\right)^{-1}\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{Z'Z}\right)\boldsymbol{p}\lim\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{X'Z}\right)^{-1}.$$

Бодлого 9.4. $y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \varepsilon_t;\quad t = 1, 2, ..., n$ регрессийн тэгшитгэлийг $\boldsymbol{z}_t$ хэрэгсэл хувьсагчийг ашиглан үнэлж байгаа гэе. Тэгвэл регрессийн коэффициентуудын үнэлэлт

$$\begin{cases} n\widehat{\beta}_{1IV} + \left(\sum x_t\right)\widehat{\beta}_{2IV} = \sum y_t \\ \left(\sum z_t\right)\widehat{\beta}_{1IV} + \left(\sum z_t x_t\right)\widehat{\beta}_{2IV} = \sum z_t y_t \end{cases}$$

системийн шийд бөгөөд

$$\widehat{\beta}_{1IV} = \overline{y} - \widehat{\beta}_{2IV}\overline{x}, \quad \widehat{\beta}_{2IV} = \frac{\sum(z_t - \overline{z})(y_t - \overline{y})}{\sum(z_t - \overline{z})(x_t - \overline{x})}$$

болохыг үзүүл.

Бодолт. Регрессоруудын матрицыг $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{\imath}\ \ \boldsymbol{x}]$, хэрэгсэл хувьсагчдын матрицыг $\boldsymbol{Z} = [\boldsymbol{\imath}\ \ \boldsymbol{z}]$ гэж тус тус тэмдэглэе. Хэрэгсэл хувьсагчийн аргаар үнэлэлтийг бодьё.

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} &= \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_{1IV} \\ \widehat{\beta}_{2IV} \end{bmatrix} = (\boldsymbol{Z'X})^{-1}\boldsymbol{Z'y} = \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{\imath}' \\ \boldsymbol{z}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\imath} & \boldsymbol{x} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\imath}' \\ \boldsymbol{z}' \end{bmatrix} \boldsymbol{y} \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{\imath} & \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\imath} & \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \frac{1}{n\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{x}\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{z}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} & -\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{x} \\ -\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{z} & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Үржүүлбэл:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{2IV} &= \frac{n\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{z}\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{y}}{n\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{x}\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{z}} = \frac{n\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - n\overline{z}\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{y}}{n\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} - n\overline{z}\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{x}} \\ &= \frac{(\boldsymbol{z} - \overline{z}\boldsymbol{\imath})'\boldsymbol{y}}{(\boldsymbol{z} - \overline{z}\boldsymbol{\imath})'\boldsymbol{x}} = \frac{(\boldsymbol{z} - \overline{z}\boldsymbol{\imath})'(\boldsymbol{y} - \overline{y}\boldsymbol{\imath})}{(\boldsymbol{z} - \overline{z}\boldsymbol{\imath})'(\boldsymbol{x} - \overline{x}\boldsymbol{\imath})} \\ &= \frac{\sum(z_t - \overline{z})(y_t - \overline{y})}{\sum(z_t - \overline{z})(x_t - \overline{x})}.\end{aligned}$$

Энд $(z_t - \overline{\boldsymbol{z}})\boldsymbol{\imath} = 0$ адилтгалыг ашиглалаа.

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{1IV} &= \frac{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{x}\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}}{n\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{x}\boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{z}} = \frac{n\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\overline{y} - n\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}\overline{x}}{n\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} - n^2\overline{z}\overline{x}} \\ &= \frac{(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\overline{y} - n\overline{z}\overline{x}\overline{y}) - (\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y}\overline{x} - n\overline{z}\overline{x}\overline{y})}{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} - n\overline{z}\overline{x}} \\ &= \frac{(\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} - n\overline{z}\overline{x})\overline{y} - (\boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} - n\overline{z}\overline{y})\overline{x}}{\boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} - n\overline{z}\overline{x}} \\ &= \overline{y} - \widehat{\beta}_{2IV}\overline{x}\end{aligned}$$

Бодлогын II хэсэг. $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV}$ үнэлэлт $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = (\boldsymbol{Z'X})^{-1}\boldsymbol{Z'y}$ тэгшитгэлийг хангах тул

$$(\boldsymbol{Z'X})\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{IV} = \boldsymbol{Z'y}.$$

Үүнийг координатаар бичвэл:

$$\begin{bmatrix} n & \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{z}'\boldsymbol{\imath} & \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_{1IV} \\ \widehat{\beta}_{2IV} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

буюу

$$\begin{aligned} n\widehat{\beta}_{1IV} + \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{x}\widehat{\beta}_{2IV} &= \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{\imath}'\boldsymbol{z}\widehat{\beta}_{1IV} + \boldsymbol{z}'\boldsymbol{x}\widehat{\beta}_{2IV} &= \boldsymbol{z}'\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

болж бодлогын нөхцөлд заасан системтэй давхцана.

Бодлого 9.5. $\boldsymbol{x}_{tp}$ регрессорууд нь ε_t алдаатай корреляц хамаарал бүхий $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$; $\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2\boldsymbol{I}$ загварыг авч үзье. $\boldsymbol{Z}$ нь ямар нэг матриц байг. Өгөгдсөн тэгшитгэлийг зүүн талаас нь $\boldsymbol{Z}'$ матрицаар үржүүлье.

$$\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon} \tag{$*$}$$

Хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргын үнэлэлт (5.4) нь $(*)$ тэгшитгэлийн коэффициентуудын векторын хувьд $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1})\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$ болохыг үзүүл. Үр дүнг хэрэгсэл хувьсагчийн аргын (9.5) томьёотой харьцуулж үз.

Бодолт. $(*)$ тэгшитгэлд $\widetilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}$; $\widetilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y}$; $\widetilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}$ гэсэн тэмдэглэгээ оруулбал $\widetilde{\boldsymbol{y}} = \widetilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\beta} + \widetilde{\varepsilon}$, $\mathrm{V}(\widetilde{\varepsilon}) = \mathrm{V}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{Z}'\mathrm{V}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{Z} = \sigma^2\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z} = \Omega$ хэлбэртэй болно. $(*)$ тэгшитгэлийн коэффициентуудын векторт хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргын (5.4) томьёог хэрэглэвэл:

$$\begin{aligned} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} =& (\widetilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{X}})^{-1}\widetilde{\boldsymbol{X}}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{y}} = ((\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})'(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}))^{-1} \cdot (\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})'(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} \\ =& (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

болж хэрэгсэл хувьсагч оруулж олсон үнэлэлттэй ижил гарч байна.

Бүлэг 10

Регрессийн тэгшитгэлийн систем.

Эдийн засгийн нийлмэл объектуудыг загварчлахад нэг тэгшитгэлийг биш, хоорондоо холбоо хамааралтай хэд хэдэн тэгшитгэлийг ашиглах шаардлагатай болдог. Өөрөөр хэлбэл, загварыг тэгшитгэлийн системээр дүрслэх болдог. Иймээс загварын регрессийн шинжилгээнд тэгшитгэлийн системийг үнэлэх асуудал тулгарна. Жишээлбэл, хэрэглээний макро эдийн засгийн Кейнсийн загвар дараах хэлбэртэй дүрслэгдэнэ.

$$\begin{aligned} C_t &= \beta_1 + \beta_2 \cdot Y_t + \varepsilon_t \\ Y_t &= C_t + I_t \end{aligned}$$

Үүнд, C_t–(нийт) хэрэглээ, Y_t–үндэсний орлого, I_t– t хугацаан дахь хөрөнгө оруулалт, β_2–хэрэглээний хэлбийлт (сэтгэл ханамж).

C_t, Y_t хувьсагчдын хооронд 2–р тэгшитгэлээр тодорхойлогдох холбоо байгаа нөхцөлд загварын β_1, β_2 параметрүүдийг үнэлэхийн тулд хамгийн бага квадратын аргад засвар оруулах хэрэг гарна. Ер нь, тэгшитгэлийн системийг үнэлэхэд шинэ ойлголт оруулах, улмаар шинэ аргууд боловсруулах шаардлагатай болно. Эдгээр асуудлыг энэ бүлэгт хөндөх юм.

Эхлээд, системийг үнэлэх хялбар тохиолдол болох, тэгшитгэлүүд нь зөвхөн алдааны корреляцаараа өөр хоорондоо холбоотой системийг авч үзнэ. Ийм системийг өөр хоорондоо холбоогүй мэт харагдах тэгшитгэлийн систем гэнэ. (*Seemingly Unrelated Regression, SUR*). Дараа нь, эконометрикт нэг агшин дахь тэгшитгэлийн систем гэж нэрлэгдэх (*simultaneous equations*) регрессийн тэгшитгэлийн ерөнхий системийг судална.

10.1 Өөр хоорондоо холбоогүй мэт харагдах тэгшитгэлүүд.

Бодлогын тавил ба асуудлын мөн чанарыг ойлгохын тулд дараах жишээг авч үзье. Ямар нэг байгууллагын тухайлбал, "Газпром" компаны хөрөнгө оруулалт y–ийг түүний орлого x_1 болон үндсэн фондын хэмжээ x_2–оос хамааруулан судалж буй гэе:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t1} + \beta_3 x_{t2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, n. \tag{10.1}$$

Одоо үүнтэй ижил төрлийн үйл ажиллагаатай байгууллагын тухайлбал, “ЛУК-ойл” компаны дээрх хамаарлын загвар бидэнд байна гэж үзье:

$$z_t = \gamma_1 + \gamma_2 p_{t1} + \gamma_3 p_{t2} + u_t, \quad t = 1, \ldots, n. \tag{10.2}$$

Мэдээж, (10.1), (10.2) тэгшитгэлийг тус тусад нь үнэлж болно. Гаднаас нь харахад эдгээр нь хоорондоо холбоогүй мэт. Гэтэл хугацааны t үе болгонд “эдийн засгийн ижил орчинд” үйл ажиллагаагаа явуулж байгаа учир ε_t, u_t алдаанууд хоорондоо корреляц хамааралтай гэж тооцох нь зүй ёсны хэрэг юм. Иймд (10.1), (10.2) тэгшитгэлүүдийг нэгтгэж, хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн аргаар хамтад нь үнэлэх шаардлагатай.

Ерөнхий бодлого дараах байдлаар томъёологдоно. Регрессийн M тэгшитгэл өгөгдсөн гэе.

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{X}_1 \boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{X}_2 \boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \boldsymbol{y}_M = \boldsymbol{X}_M \boldsymbol{\beta}_M + \boldsymbol{\varepsilon}_M \end{array} \tag{10.3}$$

Үүнд, $\boldsymbol{y}_i$ – хамааран хувьсагчийн $n \times 1$ хэмжээст вектор, $\boldsymbol{X}_i$ – үл хамаарах хувьсагчдын $n \times k_i$ хэмжээст матриц, $\boldsymbol{\beta}_i$ – үл мэдэгдэх параметрүүдийн $k_i \times 1$ хэмжээст вектор, $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ – алдааны $n \times 1$ хэмжээст вектор, $i = 1, \ldots, M$. Мөн $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_i) = \mathbf{0}$, $s = t$ үед $\mathrm{E}(\varepsilon_{is}\varepsilon_{jt}) = \sigma_{ij}$, бусад тохиолдолд 0 гэж үзнэ. Сүүлийн нөхцлийг вектор хэлбэрт бичвэл:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_j') = \sigma_{ij} \boldsymbol{I}_n, \quad i, j = 1, \ldots, M. \tag{10.4}$$

Үүнд, $\boldsymbol{I}_n - n \times n$ хэмжээст нэгж матриц. Өөрөөр хэлбэл, тус бүр нь n ажиглалт бүхий регрессийн M тэгшитгэл өгөгдсөн гэсэн үг. Хэрэв өгөгдлүүд хугацааны цувааны бүтэцтэй бол бүх тэгшитгэл дэх алдаанууд хугацааны нэг ижил агшинд корреляцтай, өөр өөр агшинд корреляцгүй гэж тооцно. (10.4) тэнцэтгэл эдгээр тэгшитгэл хоорондын холбоог илэрхийлнэ. (10.3) системийн тусдаа тэгшитгэл бүр сонгодог регрессийн загварын нөхцлүүдийг хангах бөгөөд хамгийн бага квадратын аргаар үнэлж болно. Гэвч эдгээр тэгшитгэлийг нэгтгэж, хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн аргыг хэрэглэвэл үнэлэлтийн чанарыг сайжруулж болно. Дараах тэмдэглэгээг оруулъя.

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{y}_1 \\ \boldsymbol{y}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_M \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{X}_2 & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \boldsymbol{X}_M \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_M \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_M \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_{ij}), \quad i, j = 1, \ldots, M.$$

Тэгвэл (10.3) системийг дараах хэлбэртэй бичиж болно.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Хоёр матриц үржүүлэх Кронекерийн дүрэм ашиглан алдааны векторын ковариацийн матрицыг бичвэл

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \boldsymbol{I}_n$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ матриц үл бөхөх байг. $\boldsymbol{\beta}$ векторын үнэлэлтийг байгуулахын тулд хамгийн бага квадратын өргөтгөсөн арга хэрэглэе.

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{y} \qquad (10.5)$$

(Энд $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ гэсэн үл бөхөх квадрат матрицын хувьд $(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \otimes \boldsymbol{B}^{-1}$ чанарыг ашиглав).

Ерөнхий тохиолдолд (10.5) үнэлэлт, (10.3) системийн тэгшитгэл бүрт хамгийн бага квадратын арга хэрэглэж гарган авсан үнэлэлтээс ялгаатай байна. Гэхдээ эдгээр үнэлэлт хоёр тохиолдолд давхцана.

1. (10.3) системийн тэгшитгэлүүд өөр хоорондоо холбоогүй буюу $i \neq j$ үед $\sigma_{ij} = 0$.
2. (10.3)–ын бүх тэгшитгэлүүд нэгэн ижил үл хамаарах хувьсагчидтай. Өөрөөр хэлбэл, $\boldsymbol{X}_1 = \boldsymbol{X}_2 = \ldots = \boldsymbol{X}_M$.

Эхний тохиолдолд $\boldsymbol{\Omega}$ диагонал матриц болох тул илэрхий. Хоёрдугаар тохиолдлын баталгааг энд хийлгүй үлдээлээ. Хамгийн бага квадратын нэмэлт нөхцөлтэй, өргөтгөсөн арга ашиглахын тулд $\boldsymbol{\Sigma}$ матрицыг үнэлэх хэрэгтэй. Үүний тулд (10.3) системийн тэгшитгэл бүрт хамгийн бага квадратын арга хэрэглэн үлдэгдлийн вектор $\boldsymbol{e}_i$, $(i = 1, \ldots, M)$–г гарган авна.

Дараа нь σ_{ij} – ковариацийн үнэлэлтийн оронд $s_{ij} = \dfrac{(\boldsymbol{e}_i'\boldsymbol{e}_j)}{n}$ хэмжигдэхүүнийг авна. Эдгээр үнэлэлтүүд хазайлтгүй гэдгийг шалгаж болно.

Эцэст нь, алдаанууд хичнээн хүчтэй корреляцтай байх тутам $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$ үнэлэлтийн чанар ХБК-үнэлэлттэй харьцуулахад төчнөөн өндөр байхыг тэмдэглэе.

10.2 Нэг агшин дахь тэгшитгэлийн систем

10.2.1 Эрэлт ба нийлүүлэлтийн муруй

Жишээ1. Эхлээд, нэг агшин дахь тэгшитгэлийн системийн хялбар жишээ авч үзье. Ийм систем нь, түүний үл мэдэгдэх параметрийг үнэлэх явцад регрессийн үндсэн асуудлуудыг дэвшүүлэн тавидаг. (Энэ жишээг эконометрикийн бүх сурах бичигт оруулсан байдаг.) Ямар нэг барааны эрэлт нийлүүлэлтийг түүний үнэ ба орлогоос хамааруулан судалж байгаа гэе.

$$\begin{array}{ll} Q_t^S = \alpha_1 + \alpha_2 P_t + \varepsilon_t & \text{(нийлүүлэлт)} \\ Q_t^D = \beta_1 + \beta_2 P_t + \beta_3 Y_t + u_t & \text{(эрэлт)} \end{array}$$

Үүнд, $Y_t - t$ агшин дахь орлого, $P_t - t$ агшин дахь үнэ. Зах зээлд тэнцвэр тогтсон гэж үзнэ. Өөрөөр хэлбэл, хугацааны агшин бүрт зөвхөн нэг хэмжигдэхүүн ажиглагдана.

$$Q_t^S = Q_t^D = Q_t \quad \text{(тэнцвэр)}$$

Хялбарчлах зорилгоор, тэгшитгэл бүрийг хазайлтаар нь бичвэл дараах хэлбэртэй болно.

$$q_t = \alpha_2 p_t + \varepsilon_t \quad \text{(нийлүүлэлт)} \tag{10.6}$$

$$q_t = \beta_2 p_t + \beta_3 y_t + u_t \quad \text{(эрэлт)} \tag{10.7}$$

Загвараас үзвэл үнэ ба эрэлт-нийлүүлэлтийн хэмжээ нэгэн зэрэг тодорхойлогдож байна. (Эндээс "нэг агшин дахь" гэж нэрлэсэн.) Иймд энэ хоёр хувьсагчийг дотоод (эндоген) хувьсагч гэж тооцно. Орлогын утгууд болох y_t нь гадаад (экзоген) хувьсагч болно. Хувьсагчдыг эндоген, экзоген гэж ангилах нь загварын агуулга онцлогоор тодорхойлогдоно. *Тэгшитгэл бүрийн гадаад хувьсагч нь алдаатайгаа корреляц хамааралгүй гэж үздэг.* Энэ үед тэгшитгэлүүдийн баруун гар талд байгаа эндоген хувьсагчид харгалзах тэгшитгэлийнхээ алдаатай тэгээс ялгаатай корреляцтай байна. Үнэхээр, (10.6), (10.7) тэгшитгэлийн системээс q_t, p_t–г ялгавал:

$$q_t = \frac{\alpha_2\beta_3 y_t}{\alpha_2 - \beta_2} + \frac{\alpha_2 u_t - \beta_2\varepsilon_t}{\alpha_2 - \beta_2} \tag{10.8}$$

$$p_t = \frac{\beta_3 y_t}{\alpha_2 - \beta_2} + \frac{u_t - \varepsilon_t}{\alpha_2 - \beta_2} \tag{10.9}$$

y_t – нь u_t ба ε_t–тэй корреляц хамааралгүй тул (10.9) тэгшитгэлээс

$$\mathrm{Cov}(p_t, \varepsilon_t) = \frac{\mathrm{Cov}(u_t, \varepsilon_t) - \mathrm{V}(\varepsilon_t)}{\alpha_2 - \beta_2} \tag{10.10}$$

болох ба ерөнхий тохиолдолд тэгтэй тэнцэхгүй.

Регрессорууд алдаатайгаа корреляцтай байвал ХБК-үнэлэлт нь хазайлттай, зохимжтой биш байдаг тухай стохастик регрессоруудтай загварын хувьд тэмдэглэсэн билээ. Бидний хялбар жишээнд энэхүү хазайлттай үнэлэлтийг ил хэлбэрээр олж болно. (10.6) тэгшитгэлийн α_2 коэффициентийн ХБК-үнэлэлт дараах хэлбэртэй олдоно.

$$\widehat{\alpha}_2 = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} q_t p_t}{\sum\limits_{t=1}^{n} p_t^2} = \alpha_2 + \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} \varepsilon_t p_t}{\sum\limits_{t=1}^{n} p_t^2} \tag{10.11}$$

(10.11)–ийн сүүлийн нэмэгдэхүүний хүртвэр корреляц хамааралтай хэмжигдэхүүний үржвэрээс бүрдсэн, хүртвэр хуваариуд нь хоорондоо хамааралтай учраас ерөнхий тохиолдолд

$$\mathrm{E}\left(\frac{\sum\limits_{t=1}^{n} \varepsilon_t p_t}{\sum\limits_{t=1}^{n} p_t^2}\right) = 0$$

байх ямар ч найдлагагүй. Өөрөөр хэлбэл, $\widehat{\alpha}_2$ нь хазайлттай. Түүнээс гадна энэ үнэлэлт зохимжтой биш. Хялбарчлах үүднээс u, ε алдаанууд хамааралгүй бөгөөд

u_t, ε_2 –ийн тархалт t–ээс хамаарахгүй гэе. Мөн $\boldsymbol{p}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} y_t^2 = \mathrm{V}(y)$ хязгаар оршдог байг. (10.11)–ийг дараах хэлбэртэй бичвэл:

$$\widehat{\alpha}_2 = \alpha_2 + \frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}\varepsilon_t p_t}{\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n} p_t^2}.$$

(10.10) томъёо ба их тооны хууль ёсоор

$$\boldsymbol{p}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t p_t = -\frac{\mathrm{V}(\varepsilon_t)}{\alpha_2-\beta_2}.$$

y нь u болон ε–той корреляц хамааралгүй гэдгээс (10.9) ёсоор

$$\boldsymbol{p}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} p_t^2 = \frac{1}{(\alpha_2-\beta_2)^2}\cdot\left[\beta_3^2\mathrm{V}(y)+\mathrm{V}(\varepsilon)+\mathrm{V}(u)\right]$$

Эцэст нь,

$$\boldsymbol{p}\lim_{n\to\infty}\widehat{\alpha}_2 = \alpha_2 - \frac{\mathrm{V}(\varepsilon)(\alpha_2-\beta_2)}{\beta_3^2\mathrm{V}(y)+\mathrm{V}(u)+\mathrm{V}(\varepsilon)} = \lambda\alpha_2 + (1-\lambda)\beta_2,$$

$$\lambda = \frac{\beta_3^2\mathrm{V}(y)+\mathrm{V}(u)}{\beta_3^2\mathrm{V}(y)+\mathrm{V}(u)+\mathrm{V}(\varepsilon)},\quad 1-\lambda = \frac{\mathrm{V}(\varepsilon)}{\beta_3^2\mathrm{V}(y)+\mathrm{V}(u)+\mathrm{V}(\varepsilon)}.$$

Эндээс үзвэл, зөвхөн $\mathrm{V}(\varepsilon)=0$ үед л $\boldsymbol{p}\lim\limits_{n\to\infty}\widehat{\alpha}_2 = \alpha_2$ байна. (10.6), (10.7)–г *загварын бүтцийн хэлбэр*, эдгээр тэгшитгэлийн коэффициентуудыг *бүтцийн коэффициентууд* гэнэ. (10.8), (10.9)–ийг *загварын цэгцэлсэн хэлбэр* гэнэ. Дараах тэмдэглэгээг оруулж (10.8), (10.9) томъёог дахин бичвэл

$$\pi_1 = \frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_2-\beta_2},\quad \nu_{1t} = \frac{\alpha_2 u_t - \beta_2\varepsilon_t}{\alpha_2-\beta_2} \tag{10.12}$$

$$\pi_2 = \frac{\beta_3}{\alpha_2-\beta_2},\quad \nu_{2t} = \frac{u_t-\varepsilon_t}{\alpha_2-\beta_2}, \tag{10.13}$$

(10.8), (10.9)

$$q_t = \pi_1 y_t + \nu_{1t}$$

$$p_t = \pi_2 y_t + \nu_{2t}.$$

Энэ тэгшитгэл тус бүрийн гадаад хувьсагч нь алдаатайгаа корреляц хамааралгүй учир коэффициентуудын ХБК- үнэлэлт π_1, π_2 нь хазайлтгүй байна. $\alpha_2 = \dfrac{\pi_1}{\pi_2}$ болох ба Слуцкийн теором ёсоор $\widehat{\alpha}_{\mathrm{ILS}} = \dfrac{\widehat{\pi}_1}{\widehat{\pi}_2}$ нь бүтцийн параметр α_2–ын хазайлтгүй үнэлэлт болно. Ингэж, цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентуудын үнэлэлтээр бүтцийн коэффициентуудыг үнэлэхийг *ХБК–ын шууд бус арга (Indirect Least Squares,* *ILS)* гэж нэрлэдэг. Иймээс ХБК–ын шууд бус арга ашиглан эхний тэгшитгэлийн бүтцийн коэффициентийн хувьд зохимжтой үнэлэлтийг байгуулж болж байна.

Регрессорууд ба алдаа корреляц хамааралтай үед зохимжтой үнэлэлт гарган авахын тулд хэрэгсэл хувьсагчдыг ашиглаж болохыг Бүлэг 9–д тэмдэглэсэн билээ. Манай загварт α_2–ыг үнэлэхийн тулд хэрэгсэл хувьсагчийн оронд y–ийг авах нь зүйтэй. Учир нь, y хувьсагч ε–той корреляцгүй, (10.9) ёсоор p–тэй корреляцтай. Тэгвэл (9.2) ёсоор

$$\widehat{\alpha}_{2IV} = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} q_t y_t}{\sum\limits_{t=1}^{n} p_t y_t} = \frac{\widehat{\pi}_1}{\widehat{\pi}_2} = \widehat{\alpha}_{ILS}, \quad \widehat{\pi}_1 = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} q_t y_t}{\sum\limits_{t=1}^{n} y_t^2}, \quad \widehat{\pi}_2 = \frac{\sum\limits_{t=1}^{n} p_t y_t}{\sum\limits_{t=1}^{n} y_t^2}.$$

Энэ тохиолдолд ХБК–ын шууд бус аргаар олсон үнэлэлтүүд хэрэгсэл хувьсагчийн тусламжтай олсон үнэлэлтүүдтэй давхцаж байна.

Жишээ2. (10.7) тэгшитгэлд хүүгийн хэмжээг нэмж оруулан анхны загварыг арай хүндрүүлье. r_t нь гадаад хувьсагч болно.

$$q_t = \beta_2 p_t + \beta_3 y_t + \beta_4 r_t + u_t \qquad \text{(эрэлт)} \tag{10.14}$$

(10.6), (10.14) системээс цэгцэлсэн хэлбэрийг олбол:

$$q_t = \pi_{11} y_t + \pi_{12} r_t + \nu_{1t}$$

$$p_t = \pi_{21} y_t + \pi_{22} r_t + \nu_{2t}$$

Үүнд,

$$\pi_{11} = \frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_2 - \beta_2}, \quad \pi_{12} = \frac{\alpha_2\beta_4}{\alpha_2 - \beta_2},$$
$$\pi_{21} = \frac{\beta_3}{\alpha_2 - \beta_2}, \quad \pi_{22} = \frac{\beta_4}{\alpha_2 - \beta_2}.$$

Харин ν_{1t}, ν_{2t} нь (10.12) ба (10.13)–тай адил. $\alpha_2 = \dfrac{\pi_{11}}{\pi_{21}} = \dfrac{\pi_{12}}{\pi_{22}}$ байх нь илэрхий. Иймээс ХБК–ын шууд бус аргыг хэрэглэх үед бүтцийн параметр α_2–ийн оронд эсвэл $\dfrac{\widehat{\pi}_{11}}{\widehat{\pi}_{21}}$–г эсвэл $\dfrac{\widehat{\pi}_{12}}{\widehat{\pi}_{22}}$–г авч болох бөгөөд, эдгээр нь ерөнхий тохиолдолд өөр өөр үнэлэлтүүд юм. Түүнчлэн хэрэгсэл хувьсагчийн оронд y_t–г ч, r_t–г ч авч болох ба мөн ялгаатай үнэлэлтүүд юм. Тэгэхээр, эдгээр үнэлэлтийн аль нь илүү сайн бэ? гэсэн асуулт зүй ёсоор гарч ирнэ. Энэ асуултын хариултыг ерөнхий бодлого авч үзэх үед өгнө.

Манай тохиолдолд анхны болон цэгцэлсэн, хүндрүүлсэн аль ч загварын коэффициентуудыг мэдлээ ч гэсэн хоёрдугаар тэгшитгэлийн бүтцийн параметрүүдийн тухай ямар нэг дүгнэлт хийх боломжгүй байна. Түүнчлэн, энэ тэгшитгэлийн хувьд регрессорууд нь хоорондоо шугаман хамааралтай учраас хэрэгсэл хувьсагчийн оронд y–ийг ч, r–ийг ч ашиглах боломжгүй. Энэ үзэгдэл "адил байх" (товчоор адилсах гэе) (*identified*) хэмээн нэрлэгдэх асуудалтай нягт уялдаатай бөгөөд энэ тухай хойно авч үзнэ. Өгөгдсөн тохиолдолд (10.7) тэгшитгэл яагаад эрэлтийн хувьд адилсахгүй (эсвэл үл адилсах) болохыг хялбархан ойлгож болно. Үнэхээр дурын λ тоо авч нэгдүгээр тэгшитгэлийг λ–аар, хоёрдугаар тэгшитгэлийг $(1-\lambda)$–аар үржүүлж нэмбэл:

$$q_t = \gamma_2 p_t + \gamma_3 y_t + \eta_t. \tag{10.15}$$

Үүнд, $\gamma_2 = \lambda\alpha_2 + (1-\lambda)\beta_2$, $\gamma_3 = (1-\lambda)\beta_3$, $\eta_t = \lambda\varepsilon_t + (1-\lambda)u_t$.

(10.15) нь (10.7)–той ижил хэлбэртэй байна. Өөрөөр хэлбэл, q_t, p_t, y_t –өгөгдлүүдтэй нийцэх төгсгөлгүй олон бүтцийн хэлбэр олдоно гэсэн үг.

Бидний авч үзсэн хялбар жишээнд тааралдсан асуудлуудын талаарх зарим гаргалгааг томъёолъё.

1. Нэг агшин дахь тэгшитгэлийн системд хувьсагчдыг гадаад, дотоод гэж ангилна. Эхнийх нь хоёрдахиасаа ялгагдах ялгаа нь тэгшитгэл бүрт тэдгээр нь харгалзах алдаатайгаа корреляцгүй байдагт оршино.

2. Эндоген хувьсагчид ба алдаанууд корреляц хамааралтай учраас бүтцийн тэгшитгэлд хамгийн бага квадратын аргыг шууд хэрэглэх нь бүтцийн коэффициентуудын үнэлэлтийг хазайлттай, зохимжтой биш болгоход хүргэнэ.

3. Загварын цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентууд ХБК аргаар зохимжтой үнэлэгдэнэ. Бүтцийн параметрүүдийг үнэлэхэд эдгээр үнэлэлтийг ашиглаж болно (ХБК–ын шууд бус арга). Энэ үед дараах гурван тохиолдол үүснэ:

   - Бүтцийн коэффициент цэгцэлсэн системийн коэффициентуудаар нэг утгатай илэрхийлэгдэх (яг адилсах),
   - Бүтцийн коэффициент ХБК–ын шууд бус аргаар олсон хэд хэдэн өөр үнэлэлтээр илэрхийлэгдэх (давж адилсах),
   - Бүтцийн коэффициент цэгцэлсэн системийн коэффициентуудаар илэрхийлэгдэх боломжгүй (үл адилсах).

   Сүүлчийн тохиолдолд бүтцийн харгалзах тэгшитгэл адилсахгүй. Тэгшитгэлийн үл адилсах нь ажиглалтын тоотой холбоогүй.

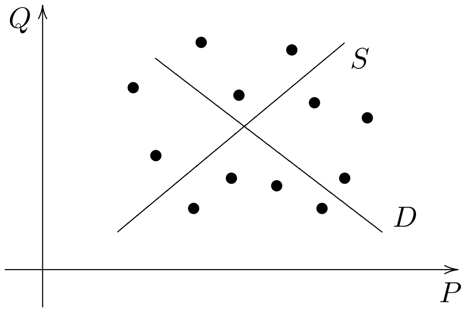
4. Экзоген хувьсагчдыг хэрэгсэл хувьсагчаар ашиглаж болно. Энэ тохиолдолд шууд бус аргын үнэлэлт нэг утгатай бөгөөд хэрэгсэл хувьсагчийн тусламжтай олсон үнэлэлттэй давхцана.

Ерөнхий онолд орохын өмнө, адилсах ойлголтын тухай илүү ойлгомжтой төсөөлөл өгөхийн тулд анхны (10.6), (10.7) загваруудын хоёр хувилбарыг авч үзье.

Жишээ3. Эрэлт, нийлүүлэлт зөвхөн үнээс хамаардаг гэе:

$$\begin{aligned} q_t &= \alpha_2 p_t + \varepsilon_t \quad && \text{(нийлүүлэлт)} \\ q_t &= \beta_2 p_t + u_t. \quad && \text{(эрэлт)} \end{aligned}$$

(Q, P) хавтгай дээрх эрэлт, нийлүүлэлтийн муруйн огтлолцол нь тэнцвэрийг үзүүлж байна. Энэ загварт эрэлт, нийлүүлэлтийн зөвхөн нэг нэг муруй байгаа бөгөөд ажиглалтын утгуудад байгаа ялгаа нь ε, u гэсэн санамсаргүй алдаануудаар нөхцөлдөнө (Зураг 10.1).

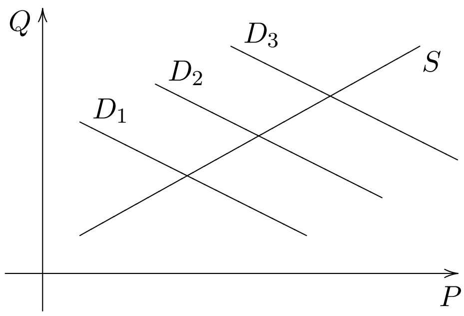


Зураг 10.1:

Зөвхөн (Q_t, P_t), $t = \overline{1,n}$ ажиглалтуудын "үүл"–ийг ашиглан "жинхэнэ" D, S шулууны тухай юу ч хэлэх боломжгүй. Учир нь (Q_t, P_t) цэг бүр дурын налуутай хоёр шулууны огтлолцолыг дүрсэлж болно. Энэ дүгнэлт, тэгшитгэлийн баруун талдаа зөвхөн санамсаргүй алдаа агуулсан загварын дараах цэгцэлсэн хэлбэрээр батлагдаж байна.

$$q_t = \frac{\alpha_2 u_t - \beta_2 \varepsilon_t}{\alpha_2 - \beta_2},$$
$$p_t = \frac{u_t - \varepsilon_t}{\alpha_2 - \beta_2}.$$

Жишээ4. Анхны загвар (10.6), (10.7)–г авъя. Энд, нийлүүлэлтийн нэг муруй ба гадаад хувьсагч y–ийн тусламжтай хэд хэдэн эрэлтийн муруйг дүрслэе. Харин ажиглалтын сарнил нь санамсаргүй алдаа төдийгүй, нийлүүлэлтийн муруйн дагуу эрэлтийн муруйн шилжих шилжилтээр нөхцөлдөнө. Энэ байдал (10.7) тэгшитгэлийн параметрүүдийг үнэлэх боломж олгоно. Энэ үед өмнөх жишээний адилаар D_t шулууны байршлын тухай мөн юу ч хэлэх боломжгүй.

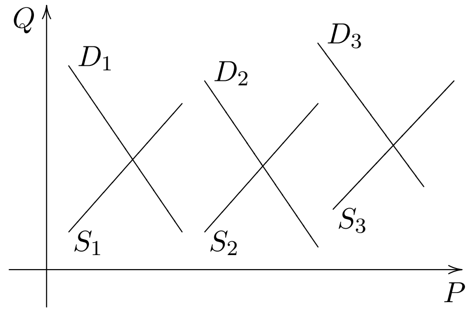


Зураг 10.2:

Жишээ5. Эрэлт нийлүүлэлт орлогоос хамаарна:

$$\begin{aligned} q_t &= \alpha_2 p_t + \alpha_3 y_t + \varepsilon_t \quad &\text{(нийлүүлэлт)} \\ q_t &= \beta_2 p_t + \beta_3 y_t + u_t. \quad &\text{(эрэлт)} \end{aligned}$$

Энэ тохиолдолд ажиглалтын сарнил зөвхөн санамсаргүй алдаа байгаагаар тайлбарлагдахгүй, хоёр муруйн нэгэн зэрэг шилжилтээр тайлбарлагдана. 1–р жишээний адилаар нэг ч муруй нь адилсахгүй (Зураг 10.3).



Зураг 10.3:

10.2.2 Нэг агшин дахь тэгшитгэлийн системийн матрицан хэлбэр. Адилсах асуудал (identification problem).

Загварын бүтцийн хэлбэр хэмээн нэрлэгдэх дараах тэгшитгэлийн систем өгөгдсөн гэе.

$$\left.\begin{array}{l}\beta_{11}y_{1t}+\beta_{12}y_{2t}+\ldots+\beta_{1m}y_{mt}+\gamma_{11}x_{1t}+\ldots+\gamma_{1k}x_{kt}=\varepsilon_{1t}\\ \beta_{21}y_{1t}+\beta_{22}y_{2t}+\ldots+\beta_{2m}y_{mt}+\gamma_{21}x_{1t}+\ldots+\gamma_{2k}x_{kt}=\varepsilon_{2t}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \beta_{m1}y_{1t}+\beta_{m2}y_{2t}+\ldots+\beta_{mm}y_{mt}+\gamma_{m1}x_{1t}+\ldots+\gamma_{mk}x_{kt}=\varepsilon_{mt}\end{array}\right\} \tag{10.16}$$

Системийн дотоод төлвийг тодорхойлж байгаа $y_1,\ldots,y_m$ хувьсагчдыг *эндоген хувьсагчид* гэх ба харин $x_1,\ldots,x_k$ хувьсагчдад системд гаднаас нь нөлөөлдөг *экзоген* болон *хугацааны хоцролттой (лагтай) эндоген хувьсагчдыг* оруулж болно. Хугацааны лагтай, эндоген хувьсагчдыг *урьдчилан тодорхойлогдсон хувьсагчид* гэж нэрлэнэ.

Индекс $t,\ t=\overline{1,n}$ нь ажиглалтын дугаар, $\varepsilon_{1t},\ldots,\varepsilon_{mt},\ t=\overline{1,n}$ нь санамсаргүй алдаа юм. Тэгшитгэл бүрийн хувьд эндоген хувьсагчдын β–коэффициентуудын нэг нь нэгтэй тэнцүү гэж тооцно. Энэ нь нормчлолын нөхцөл юм. Энэ нөхцөл нь, тэгшитгэл бүрийн зүүн талд зөвхөн нэг эндоген хувьсагч харин баруун талд үлдсэн хувьсагчид ба санамсаргүй алдаа байрлах хэлбэрт дүрслэх боломжийг олгоно. Дараах тэмдэглэгээг оруулъя.

$$\boldsymbol{y}_t=\begin{bmatrix}y_{1t}\\ y_{2t}\\ \vdots\\ y_{mt}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_t=\begin{bmatrix}x_{1t}\\ x_{2t}\\ \vdots\\ x_{kt}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\varepsilon}_t=\begin{bmatrix}\varepsilon_{1t}\\ \varepsilon_{2t}\\ \vdots\\ \varepsilon_{mt}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}&\ldots&\beta_{1m}\\ \beta_{21}&\beta_{22}&\ldots&\beta_{2m}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \beta_{m1}&\beta_{m2}&\ldots&\beta_{mm}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Gamma}=\begin{bmatrix}\gamma_{11}&\gamma_{12}&\cdots&\gamma_{1k}\\ \gamma_{21}&\gamma_{22}&\cdots&\gamma_{2k}\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ \gamma_{m1}&\gamma_{m2}&\cdots&\gamma_{mk}\end{bmatrix}$$

Тэгвэл (10.16) систем дараах хэлбэртэй болно.

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_t+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{10.17}$$

Хувьсагчдыг экзоген, эндоген гэж ялгах нь загвараас тусдаа хийгдэх асуудал болохыг тэмдэглэе. Экзоген хувьсагчдад тавих үндсэн шаардлагуудын нэг нь, t-р ажиглалт бүрт $\boldsymbol{x}_t$, $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ векторууд корреляц хамааралгүй байх явдал юм. Дараах нөхцлүүд биелэгдэнэ гэж үзье.

1. $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{0}$,
2. $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t') = \boldsymbol{\Sigma}$, $\boldsymbol{\Sigma}$ матриц нь эерэг тодорхойлогдсон бөгөөд t–ээс хамаарахгүй,
3. $t \neq s$ үед $\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\varepsilon}_s$ векторууд корреляц хамааралгүй,
4. $\boldsymbol{B}$ матриц үл бөхөх.

4. нөхцөлийг ашиглан (10.17) тэнцэтгэлийн хоёр талыг зүүн талаас нь $\boldsymbol{B}^{-1}$–ээр үржүүлбэл:

$$\boldsymbol{y}_t = -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{\nu}_t. \tag{10.18}$$

Энд, $\boldsymbol{\Pi} = -\boldsymbol{B}^{-1}\Gamma$, $\boldsymbol{\nu}_t = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$. (10.18) системийг *загварын цэгцэлсэн хэлбэр* гэнэ. (§ 10.2–ын Жишээ1–ийг үз.) (10.17) тэгшитгэлийн $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ матрицын элементүүдийг *бүтцийн коэффициентууд*, харин (10.18)–ын $\boldsymbol{\Pi}$ матрицын элементүүдийг *цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентууд* гэж тус тус нэрлэх нь бий.

Ерөнхий тохиолдолд эндоген хувьсагчид нь бүтцийн системийн алдаатай корреляцтай учраас аль нэг тэгшитгэлд хамгийн бага квадратын аргыг хэрэглэвэл бүтцийн коэффициентуудын хазайлттай, зохимжтой биш үнэлэлт олдоно. Энэ тохиолдолд цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентууд зохимжтой үнэлэгдэнэ. Учир нь $\boldsymbol{x}_t$–хувьсагчид бүтцийн алдаа $\boldsymbol{\varepsilon}_t$–тэй корреляцгүй бөгөөд улмаар загварын цэгцэлсэн хэлбэрийн $\boldsymbol{\nu}_t$–алдаатай мөн корреляцгүй байна.

Бид энэ бүлэгт бүтцийн загвар адил байх (товчоор адилсах гэе) тухай хийсвэр тодорхойлолтыг өгөхгүй тул энэ талаар дэлгэрэнгүй танилцахыг хүсвэл William H.Greene “Econometric Analisis” номыг санал болгож байна. Тодорхойлолтонд бариг-дахгүйгээр хэлбэл, *аль ч бүтцийн коэффициент нь цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентуудаар олдож байвал түүнийг адилсах (identified) гэнэ. Загварын бүтцийн хэлбэрт байгаа ямар нэгэн тэгшитгэлийн бүх коэффициентууд нь адилсах бол уг тэгшитгэлийг адилсах гэнэ.* Адилсах асуудал нь логик утгаараа, үнэлэх бодлогоос өмнө тавигдах бөгөөд үл адилсах (*unidentified*) гэдэг нь байгаа ажиглалтуудтай таарах бөгөөд туршилтын тооноос үл хамаарах төгсгөлгүй олон загвар олдоно гэсэн үг юм.

(10.18) гэсэн цэгцэлсэн хэлбэр $\boldsymbol{\Pi}$ матрицын $m \cdot k$–элемент, алдааны $\boldsymbol{\nu}$–векторын ковариацийн матрицын $\dfrac{m(m+1)}{2}$ элемент тус бүрийн зохимжтой үнэлэлтийг олох боломж олгоно. Харин бүтцийн хэлбэрт $\boldsymbol{B}$ матрицын $m^2 - m$ элемент, $\boldsymbol{\Gamma}$ матрицын $m \cdot k$ элемент, алдааны $\boldsymbol{\varepsilon}$–векторын ковариацийн матрицын $\dfrac{m(m+1)}{2}$ элемент тус тус үл мэдэгдэнэ. Ийнхүү бүтцийн коэффициентуудын тоо цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентуудын тооноос $m^2 - m$–ээр олон байгаа учраас ерөнхий тохиолдолд систем үл адилсана. Гэвч 1-р жишээнд үзүүлсэн ёсоор зарим нэг бүтцийн коэффициент юмуу эсвэл бүтцийн тэгшитгэл адилсах байж болно. Үүний гол шалтгаан нь бүтцийн коэффициентуудад урьдчилан таамаг зааглал тависантай холбоотой.

Тодорхой болгох зорилгоор (10.16) системийн 1–р тэгшитгэлийн адилсах бодлогыг түүний зарим нэг бүтцийн коэффициентууд нь тэгтэй тэнцүү үед авч үзье. Адилсах гэдгийн дор тэгшитгэлийн бүтцийн коэффициентуудыг цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентуудаар илэрхийлэх боломжийг ойлгоно. Цаашид, экзоген болон урьдчилан тодорхойлогдсон хувьсагчдыг нэг бүлэгт нэгтгэж, экзоген хувьсагчид гэж нэрлэе.

Эндоген хувьсагчдын өмнөх эхний q, экзоген хувьсагчдын өмнөх эхний p коэффициент нь тэгээс ялгаатай, бусад нь 0–тэй тэнцүү гэж үзэхэд ерөнхий байдал алдагдахгүй. Тэгвэл (10.16)–ын эхний тэгшитгэл дараах хэлбэртэй болно (t индексийг орхих).

$$\begin{bmatrix}\beta_{11} & \dots & \beta_{1q} & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_q\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \dots & \gamma_{1p} & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\\ \vdots\\ x_k\end{bmatrix}=\varepsilon_1 \qquad (10.19)$$

Доорхи тэмдэглэгээ хийе.

$$\boldsymbol{y}_* = \begin{bmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_q\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{y}_{**} = \begin{bmatrix} y_{q+1}\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_\times = \begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_p\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}_{\times\times} = \begin{bmatrix} x_{p+1}\\ \vdots\\ x_k\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_* = \begin{bmatrix}\beta_{11} & ,\dots, & \beta_{1q}\end{bmatrix}',\quad \boldsymbol{\gamma}_\times = \begin{bmatrix}\gamma_{11} & ,\dots, & \gamma_{1p}\end{bmatrix}'. \qquad (10.20)$$

Тэгвэл (10.19) тэгшитгэл

$$\boldsymbol{\beta}'_*\boldsymbol{y}_* + \boldsymbol{\gamma}'_\times\boldsymbol{x}_\times = \boldsymbol{\varepsilon}_1$$

хэлбэртэй болно.

(10.20) хуваалтыг ашиглан $m\times k$ хэмжээстэй $\mathbf{\Pi}$ матрицыг дараах блок хэлбэрт бичье.

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Pi}_{*,\times} & \mathbf{\Pi}_{*,\times\times}\\ \mathbf{\Pi}_{**,\times} & \mathbf{\Pi}_{**,\times\times}\end{bmatrix}$$

Тэгвэл (10.18) загварын цэгцэлсэн хэлбэр бидний тэмдэглэгээгээр

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{y}_*\\ \boldsymbol{y}_{**}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Pi}_{*,\times} & \mathbf{\Pi}_{*,\times\times}\\ \mathbf{\Pi}_{**,\times} & \mathbf{\Pi}_{**,\times\times}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_\times\\ \boldsymbol{x}_{\times\times}\end{bmatrix} + \boldsymbol{\nu}.$$

хэлбэртэй болно. $\boldsymbol{B}\mathbf{\Pi} = -\mathbf{\Gamma}$ гэдгийг санавал эдгээр матрицын эхний мөрүүдийн хувьд

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_*\\ \mathbf{0}_{m-q}\end{bmatrix}'\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{\Pi}_{*,\times} & \mathbf{\Pi}_{*,\times\times}\\ \mathbf{\Pi}_{**,\times} & \mathbf{\Pi}_{**,\times\times}\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}\boldsymbol{\gamma}_\times\\ \mathbf{0}_{k-p}\end{bmatrix}'$$

тэнцэтгэл үүснэ. Үүнд, $\mathbf{0}_{\boldsymbol{r}}$ нь r хэмжээст тэг вектор-багана. Блок матриц дээр хийх үйлдлийн дүрэм ёсоор

$$\boldsymbol{\beta}'_*\mathbf{\Pi}_{*,\times} = -\boldsymbol{\gamma}'_\times \qquad (10.21)$$

$$\boldsymbol{\beta}'_*\mathbf{\Pi}_{*,\times\times} = \mathbf{0}'_{k-p} \qquad (10.22)$$

Нормчлолын нөхцөл ёсоор $\boldsymbol{\beta}_*$–векторын элементүүдийн нэг нь 1–тэй тэнцүү учраас (10.22) харьцаа нь $(q-1)$ үл мэдэгдэгч бүхий $(k-p)$ тэгшитгэлийн шугаман систем юм. Хэрэв $\boldsymbol{\beta}_*$–коэффициентууд олдвол $\boldsymbol{\gamma}_\times$–коэффициентууд (10.21) тэгшитгэлээс олдоно. (10.22) системийн $\boldsymbol{\beta}_*$–параметрүүд $\mathbf{\Pi}_{*,\times\times}$–матрицын элементүүдээр ямар нэг байдлаар илэрхийлэгдэхийн тулд системийн тэгшитгэлийн тоо үл мэдэгдэгчдийн тооноос багагүй байх ёстой:

$$k - p \geq q - 1 \tag{10.23}$$

Өөрөөр хэлбэл, тэгшитгэлээс зайлуулсан экзоген хувьсагчийн тоо, тэгшитгэлд оруулсан эндоген хувьсагчдын тооноос нэгийг хассанаас багагүй байх ёстой болж байна. (10.23) нөхцлийг эрэмбийн нөхцөл *(order condition)* гэж нэрлэх бөгөөд тэгшитгэл адилсах зөвхөн зайлшгүй нөхцөл болно. Шугаман тэгшитгэлийн системийн ерөнхий онол ёсоор, (10.22) систем шийдтэй байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $\mathbf{\Pi}_{*,\times\times}$ матрицын ранг $q-1$ байх явдал билээ.

$$\operatorname{rank}(\mathbf{\Pi}_{*,\times\times}) = q - 1. \tag{10.24}$$

Энэ тэнцэтгэлийг *рангийн нөхцөл (rank condition)* гэх бөгөөд энэ нь тэгшитгэл адилсах зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл юм.

(10.23) нөхцлийн хувьд

хэрэв $k-p=q-1$ бол яг адилсах (бүрэн адилсах) *(exactly identified)*

хэрэв $k-p>q-1$ бол давж адилсах (хэтэрч адилсах) *(overidentified)* гэж тус тус нэрлэх нь бий. Сүүлчийн тохиолдолд тэгшитгэлийн тоо хувьсагчдын тооноос давах учраас бүтцийн коэффициент $\boldsymbol{\beta}_*$–ийн зарим нь 2–р жишээнд авч үзсэний адилаар $\mathbf{\Pi}_{*,\times\times}$ матрицын элементүүдээр янз бүрийн хэлбэрээр илэрхийлэгдэж болно.

10.2.3 Нэг агшин дахь тэгшитгэлийн системийг үнэлэх. Хамгийн бага квадратын хоёр алхамт арга.

(10.16)–системийн аль нэг тэгшитгэлийг үнэлэхдээ эхлээд адилсах, үл адилсах асуудлыг авч үзэх нь утга төгөлдөр болох тухай өмнөх хэсэгт дурдсан билээ. Тодорхой болгох зорилгоор, системийн эхний тэгшитгэл q эндоген, p экзоген хувьсагчдыг агуулах бөгөөд адилсах (тухайн тохиолдолд эрэмбийн нөхцөл биелэх) гэж үзье. Энэ тохиолдолд $\boldsymbol{y}_1$–ийн коэффициентийг 1 гэж тооцоход ерөнхий байдал үл алдагдана.

1. ***Хамгийн бага квадратын шууд бус арга.*** Тэгшитгэл адилсах үед (10.18) загварын цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентуудыг хамгийн бага квадратын аргаар үнэлж, $\mathbf{\Pi}$ матрицын элементүүдийг эдгээр үнэлэлтээр сольсоны дараа (10.21), (10.22) системээс бүтцийн коэффициентуудыг олж болно. Энэ аргыг *ХБК–ын шууд бус арга (Inderect Least Squares)* гэнэ. (§ 10.2–ын Жишээ 1–ийг үз) Загварын цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентуудын үнэлэлт зохимжтой учир гарган авсан үнэлэлтүүд Слуцкийн теором ёсоор зохимжтой байна. Гэвч энэ аргад нэг дутагдал бий: (10.22) системийн тэгшитгэлийн тоо хувьсагчийн тооноос давсан үед (давж адилсах) зөвхөн нэг бүтцийн коэффициент гэхэд л цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентуудаар янз бүрээр илэрхийлэгдэнэ. Энэ байдал, онол ба практикийн аль ч талаасаа уг аргыг хэрэглэх хүрээг хумьж байгаа юм. Иймучраас дараах аргыг хэрэглэдэг.

2. ***Хамгийн бага квадратын хоёр алхамт арга.*** 1–р тэгшитгэлийг дараах хэлбэрт бичье.

$$y_{1t} = -\beta_{12}y_{2t} - \ldots - \beta_{1q}y_{qt} - \gamma_{11}x_{1t} - \gamma_{12}x_{2t} - \ldots - \gamma_{1p}x_{pt} + \varepsilon_{1t}, \qquad t = 1, \ldots, n. \quad (10.25)$$

Дараах тэмдэглэгээ оруулбал:

$$\boldsymbol{y}_1 = \begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Y}_1 = \begin{bmatrix} y_{21} & \ldots & y_{q1} \\ y_{22} & \ldots & y_{q2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{2n} & \ldots & y_{qn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{p1} \\ x_{12} & \ldots & x_{p2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n} & \ldots & x_{pn} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} -\beta_{12} \\ \vdots \\ -\beta_{1q} \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} -\gamma_{11} \\ \vdots \\ -\gamma_{1p} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & \ldots & x_{k1} \\ x_{12} & \ldots & x_{k2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1n} & \ldots & x_{kn} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{Y}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_1\gamma_1 + \varepsilon_1. \quad (10.26)$$

$\boldsymbol{Y}_1$ матрицын элементүүд алдааны вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_1$–тэй корреляц хамааралтай учраас хамгийн бага квадратын аргыг шууд хэрэглэх нь хазайлттай, зохимжтой биш үнэлэлтэнд хүргэнэ. Энэ тохиолдолд хэрэглэсэл хувьсагчдыг ашиглана. Хэрэгсэл хувьсагчдын оронд, тухайлбал, $\boldsymbol{X}_1$–д ороогүй экзоген хувьсагчдыг авч болно (Хэрэгсэл хувьсагчаар зөвхөн $\boldsymbol{X}_1$–д орсон хувьсагчдыг авч болохгүй. Учир нь систем бүхэлдээ коллинеар болоход хүрнэ). Бүлэг 9–д үзсэн ёсоор хэрэгсэл хувьсагчийн тоо $\boldsymbol{Y}_1$ дахь хувьсагчийн тоо $(q-1)$–ээс багагүй байх ёстой. Манай тохиолдолд энэ шаардлага эрэмбийн нөхцлөөр биелэгдэнэ. Хэрэгсэл хувьсагчдыг сонгон авах хамгийн өргөн дэлгэрсэн арга нь дараах дараалллаар байгуулагдах *Хамгийн бага квадратын хоёр алхамт арга (Two Stage Least Squares, 2SLS)* юм:

1. $\boldsymbol{Y}_1$–матрицын багана бүрийг бүх экзоген хувьсагчдаас хамааруулан регресс зохионо. Өөрөөр хэлбэл,
$$\boldsymbol{Y}_1 = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{V},$$
Үүнд, $\boldsymbol{\Pi}_1$–цэгцэлсэн хэлбэрийн коэффициентуудын $k \times (q-1)$ хэмжээст матриц.

2. $\widehat{\boldsymbol{Y}}_1 = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\Pi}}_1,\ \widehat{\boldsymbol{\Pi}}_1 = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{y}_1$ гэсэн прогнозын утгыг байгуулна.

3. (10.26)–ын баруун талын $\boldsymbol{Y}_1$–ийг $\widehat{\boldsymbol{Y}}_1$–ээр сольж регресс зохионо. Өөрөөр хэлбэл, дараах регрессийн бүтцийн коэффициентууд болох $\boldsymbol{\beta}_1$, γ_1–ийн ХБК-үнэлэлтийг байгуулна.

$$\boldsymbol{y}_1 = \widehat{\boldsymbol{Y}}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{X}_1\gamma_1 + \varepsilon_1. \quad (10.27)$$

Үнэлэлтийн энэ аргын үндсэн үр дүнг баталгаагүйгээр дурдъя.

1. Хэрэв тэгшитгэлийн хувьд рангийн нөхцөл болон эрэмбийн нөхцөл тэнцүүгийн тэмдэгтэй биелж байвал 2SLS-үнэлэлт ХБК–ын шууд бус аргаар олсон үнэлэлттэй давхцана.

2. 2SLS-үнэлэлт нь, $\widehat{\boldsymbol{Y}}_1$, $\widehat{\boldsymbol{X}}_1$ гэсэн хэрэгсэл хувьсагч бүхий аргаар олсон үнэлэлттэй давхцана.

3. Хэрэгсэл хувьсагч $\boldsymbol{Y}_1$–ийн оронд $\boldsymbol{X}$ матрицын багануудын дурын шугаман эвлүүлгийг авсан гэе. Тэгвэл энэ үнэлэлтийн ковариацийн матриц 2SLS-үнэлэлтийн ковариацийн матрицаас багагүй.

Сүүлийн чанар нь үнэлэлтийн харгалзах ангид 2SLS-үнэлэлт эрчимтэй болохыг илэрхийлж байна. Эконометрикийн ихэнх компьютерийн программуудад нэг агшин дахь тэгшитгэлийн системийг үнэлэхдээ ХБК–ын хоёр алхамт аргыг хэрэгжүүлсэн байдаг. Хамгийн бага квадратын хоёр алхамт аргыг хэрэглэхдээ тэгшитгэл бүрийг бие биеэс нь үл хамааруулан үнэлдэг болохыг тэмдэглэе. Системийн тэгшитгэлүүдийн харилцан үйлчлэлийг тооцон үнэлдэг *хамгийн бага квадратын 3 алхамт арга* байх бөгөөд энэ арга үнэлэлтийн чанарыг сайжруулдаг боловч энэхүү номын хүрээнд авч үзээгүй болно.

Эцэст нь сонгодог макро эдийн засгийн Клейны загвар, түүнийг хамгийн бага квадратын стандарт болон хоёр алхамт аргаар үнэлсэн үр дүнг авч үзье.

Жишээ6: Клейн1 загвар. Л.Клейний 1950 онд дэвшүүлсэн "Клейн1" хэмээх макро эдийн засгийн загвар нь дараах тэгшитгэлийн системээр дүрслэгдэнэ:

$$\begin{aligned}
&C_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \alpha_2 P_{t-1} + \alpha_3 (W_t^p + W_t^g) + \varepsilon_{1t} && \text{(хэрэглээ)},\\
&I_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 P_{t-1} + \beta_3 K_{t-1} + \varepsilon_{2t} && \text{(хөрөнгө оруулалт)},\\
&W_t^p = \gamma_0 + \gamma_1 X_+ \gamma_2 X_{t-1} + \gamma_3 A_t + +\varepsilon_{3t} && \text{(хувийн секторын ажлын хөлс)},\\
&X_t = C_t + I_t + G_t && \text{(тэнцвэрийн нийт эрэлт)},\\
&P_t = X_t - T_t - W_t^p && \text{(хувийн секторын орлого)},\\
&K_t = K_{t-1} + I_t && \text{(капитал)}.
\end{aligned}$$

Тэгшитгэлүүдийн зүүн талд байгаа хувьсагчид нь эндоген хувьсагчид юм. Энэ загварын экзоген хувьсагчид нь:

G–ажлын хөлсийг оруулаагүй, улсын секторын зардал,

T–шууд бус татвар ба экспортын цэвэр орлогын нийлбэр,

W^g–улсийн секторын ажлын хөлс,

A_t–хугацааны тренд (жилээр, 1931 оноос эхлэх). Түүнчлэн урьдчилан тодорхойлогдсон (хугацааны лагтай) гурван хувьсагч оруулсан. Иймээс, загвар төлөв байдлын гурав, тэнцвэрийн нэг, адилтгал хоёр тэгшитгэлийг тус тус агуулж байна.

АНУ–ын эдийн засгийн 1921–1941 оны жил бүрийн өгөгдөл дээр үндэслэн эхний гурван тэгшитгэлийг хамгийн бага квадратын стандарт болон хоёр алхамт аргаар үнэлсэн үр дүнг үзүүлье (Үнэлэлтийн стандарт алдаануудыг хаалтанд үзүүлэв).

Хамгийн бага квадратын стандарт арга:

$$\begin{aligned}
C_t &= \underset{(1.30)}{16.2} + \underset{(0.091)}{0.193}\, P_t + \underset{(0.091)}{0.090}\, P_{t-1} + \underset{(0.040)}{0.796} (W_t^p + W_t^g),\\
I_t &= \underset{(5.47)}{10.1} + \underset{(0.097)}{0.480}\, P_t + \underset{(0.101)}{0.333}\, P_{t-1} - \underset{(0.027)}{0.112}\, K_{t-1},\\
W_t^p &= \underset{(1.27)}{1.48} + \underset{(0.032)}{0.439}\, X_t + \underset{(0.037)}{0.146}\, X_{t-1} + \underset{(0.032)}{0.130}\, A_t.
\end{aligned}$$

Хамгийн бага квадратын хоёр алхамт арга:

$$\begin{aligned}
C_t &= \underset{(1.32)}{16.6} + \underset{(0.118)}{0.017}\, P_t + \underset{(0.107)}{0.21}\ 6P_{t-1} + \underset{(0.040)}{0.810}(W_t^p + W_t^g),\\
I_t &= \underset{(7.54)}{20.3} + \underset{(0.173)}{0.150}\, P_t + \underset{(0.162)}{0.616}\, P_{t-1} - \underset{(0.036)}{0.158}\, K_{t-1},\\
W_t^p &= \underset{(1.15)}{1.50} + \underset{(0.036)}{0.439}\, X_t + \underset{(0.039)}{0.147}\, X_{t-1} + \underset{(0.029)}{0.130}\, A_t.
\end{aligned}$$

10.3 Бататгах дасгал, бодлого

Бодлого 10.1. Дараах загварыг авч үзье:

$$\begin{cases} C_t = \alpha + \beta Y_t + \varepsilon_{1t}, \\ Y_t = C_t + I_t + G_t, \\ I_t = \gamma + \delta Y_t + \varepsilon_{2t}. \end{cases}$$

C_t, Y_t, I_t–эндоген хувьсагч, G_t–экзоген хувьсагч. Энэ загварыг матрицан хэлбэртэй бичиж, түүний цэгцэлсэн хэлбэрийг ол. Загварын цэгцэлсэн хэлбэрийн зургаан коэффициентод хичнээн зааглал тавигдах вэ? Цэгцэлсэн хэлбэрийн эдгээр коэффицинтуудаар α, β, γ, δ коэффициентуудыг нэг утгатай олж болно гэдгийг үзүүл. Өөрөөр хэлбэл, өгөгдсөн $\mathbf{\Pi}$ матрицын хувьд $\boldsymbol{B}\mathbf{\Pi} + \mathbf{\Gamma} = 0$ тэгшитгэл $\boldsymbol{B}$ ба $\mathbf{\Gamma}$–ийн хувьд цор ганц шийдтэй болохыг харуул.

Бодолт. Дараах тэмдэглэгээг хийе.

$$\boldsymbol{z}_t = \begin{bmatrix} C_t \\ I_t \\ Y_t \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{w}_t = \begin{bmatrix} 1 \\ G_t \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\varepsilon}_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тэгвэл загварыг $\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}_t + \mathbf{\Gamma}\boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{\varepsilon}_t$ гэсэн матрицан хэлбэрт бичиж болно. Үүнд,

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\beta \\ 0 & 1 & -\delta \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ -\gamma & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Цэгцэлсэн хэлбэр дараах байдлаар бичигдэнэ:

$$\boldsymbol{z}_t = -\boldsymbol{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{\Pi}\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{u}_t,$$

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \frac{1}{1-\beta-\gamma}\begin{bmatrix} 1-\delta & \beta & \beta \\ \delta & 1-\beta & \delta \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{1-\beta-\gamma}\begin{bmatrix} \alpha - \delta\alpha + \beta\gamma & \beta \\ \gamma - \beta\gamma + \alpha\delta & \delta \\ \alpha + \gamma & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_C^0 & \pi_C^1 \\ \pi_I^0 & \pi_I^1 \\ \pi_Y^0 & \pi_Y^1 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

Цэгцэлсэн хэлбэрийн зургаан коэффициентод дараах хоёр зааглал тавигдана.

$$\begin{cases} \pi_Y^0 = \pi_C^0 + \pi_I^0 \\ \pi_Y^1 = \pi_C^1 + \pi_I^1 + 1 \end{cases} \qquad (**)$$

Цэгцэлсэн хэлбэрийн, (**) нөхцлийг хангах өгөгдсөн коэффициентуудын тусламжтай бүтцийн хэлбэрийн α, β, γ, δ коэффициентуудыг нэг утгатай сэргээж болно. Өөрөөр хэлбэл, $\boldsymbol{B\Pi}+\boldsymbol{\Gamma}=\mathbf{0}$ тэгшитгэл цор ганц шийдтэй болохыг үзүүлье. Үнэхээр, (*) ёсоор (хэрэв $\pi_Y^1 \neq 0$ бол):

$$\begin{cases} \delta = \dfrac{\pi_I^1}{\pi_Y^1}, \quad \beta = \dfrac{\pi_C^1}{\pi_Y^1} \\ \alpha+\gamma = \dfrac{\pi_Y^0}{\pi_Y^1} \\ \alpha(1-\delta)+\gamma\beta = \dfrac{\pi_C^0}{\pi_Y^1} \end{cases}$$

δ, β–г сүүлийн хоёр тэгшитгэлд орлуулахад γ, α–аас хамаарсан систем үүснэ.

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = \dfrac{\pi_Y^0}{\pi_Y^1} \\ \alpha\left(1-\dfrac{\pi_I^1}{\pi_Y^1}\right)+\gamma\dfrac{\pi_C^1}{\pi_Y^1} = \dfrac{\pi_C^0}{\pi_Y^1} \end{cases}$$

Хоёрдугаар тэгшитгэлд $\gamma = \dfrac{\pi_Y^0}{\pi_Y^1}-\alpha$ орлуулга хийе.

$$\alpha\left(1-\frac{\pi_I^1}{\pi_Y^1}\right)+\left(\frac{\pi_Y^0}{\pi_Y^1}-\alpha\right)\frac{\pi_C^1}{\pi_Y^1} = \frac{\pi_C^0}{\pi_Y^1}$$

$$\text{эндээс,}\quad \alpha(\pi_Y^1-\pi_I^1-\pi_C^1) = \pi_C^0-\frac{\pi_Y^0\pi_C^1}{\pi_Y^1}$$

буюу (**) ёсоор $\alpha = \pi_C^0-\dfrac{\pi_Y^0\pi_C^1}{\pi_Y^1}$, $\gamma = \dfrac{\pi_Y^0}{\pi_Y^1}-\pi_C^0+\dfrac{\pi_Y^0\pi_C^1}{\pi_Y^1}$, $\delta = \dfrac{\pi_I^1}{\pi_Y^1}$, $\beta = \dfrac{\pi_C^1}{\pi_Y^1}$.

Бодлого 10.2. Дараах загварын тэгшитгэл бүрийн адилсалтыг авч үзье:

$$\begin{cases} P_t + \beta_{12}W_t + \gamma_{11}Q_t + \gamma_{13}P_{t-1} = \varepsilon_{1t} \\ \beta_{21}P_t + W_t + \beta_{23}N_t + \gamma_{22}S_t + \gamma_{24}W_{t-1} = \varepsilon_{2t} \\ + \beta_{32}W_t + N_t + \gamma_{32}S_t + \gamma_{33}P_{t-1} + \gamma_{34}W_{t-1} = \varepsilon_{3t} \end{cases}$$

Үүнд, P_t, W_t, N_t–харгалзан үнийн индекс, цалин, үйлдвэрчний татвар (эндоген хувьсагчид), Q_t, S_t–хөдөлмөрийн бүтээмж, ажил хаялтын тоо (экзоген хувьсагчид). Хэрэв:

а) $\gamma_{11}=0$,

б) $\beta_{21}=\gamma_{22}=0$,

в) $\gamma_{33}=0$ бол рангийн болон эрэмбийн нөхцөл ямар байх вэ?

Бодолт. Ижил цаг хугацааны систем дахь тэгшитгэлүүд адилсахыг хялбар хязгаарлалтай нөхцөлд (зарим коэффициентууд нь тэгтэй тэнцүү) судлах явцад дараах практик аргыг хэрэглэж болно.

Манай тохиолдолд P_t, W_t, N_t нь эндоген хувьсагчид, Q_t, S_t нь экзоген хувьсагчид, P_{t-1}, W_{t-1} нь хугацааны лагтай эндоген хувьсагчид юм. Өгөгдсөн системийг, харгалзах тэгшитгэлийн харгалзах коэффициент нь нүд бүрт байрлах дараах хүснэгт хэлбэрээр дүрслэе.

	P_t	W_t	N_t	Q_t	S_t	P_{t-1}	W_{t-1}
I тэгшитгэл	1	β_{12}	0	γ_{11}	0	γ_{13}	0
II тэгшитгэл	β_{21}	1	β_{23}	0	γ_{22}	0	γ_{24}
III тэгшитгэл	0	β_{32}	1	0	γ_{32}	γ_{33}	γ_{34}

Тэгшитгэл бүрт байгаа тэгийн тоо, тэгшитгэлийн тооноос нэгийг хассанаас багагүй байгаа нь (манай тохиолдолд, 2) эрэмбийн нөхцөл биелэхтэй эквивалент юм. Эндээс үзвэл, а), б), в) гэсэн нэмэлт зааглалгүйгээр тэгшитгэл бүрийн хувьд эрэмбийн нөхцөл биелж байна. Дурын тэгшитгэлийн хувьд рангийн нөхцөл биелэхийг дараах байдлаар шалгана. Тэгшитгэлийн ямар нэг тэг коэффициентийг авч, түүний оршин байгаа баганы тэгээс ялгаатай элементүүдийг авна. Энэ үйлдлийг уг тэгшитгэлийн тэг коэффициент бүрийн хувьд давтвал, мөрийн тоо нь тэгшитгэлийн тооноос нэгээр цөөн, баганын тоо нь тэгшитгэлийн тооноос нэгийг хассанаас багагүй матриц үүснэ. Үүссэн матриц гүйцэд рангтай байх нь рангийн нөхцөл биелэхтэй эквивалент юм. Манай бодлогын хувьд харгалзах матрицуудыг бичвэл:

нэгдүгээр тэгшитгэлийн хувьд $\begin{pmatrix} \beta_{23} & \gamma_{22} & \gamma_{24} \\ 1 & \gamma_{32} & \gamma_{34} \end{pmatrix}$,

хоёрдугаар тэгшитгэлийн хувьд $\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{13} \\ 0 & \gamma_{33} \end{pmatrix}$,

гуравдугаар тэгшитгэлийн хувьд $\begin{pmatrix} 1 & \gamma_{11} \\ \beta_{21} & 0 \end{pmatrix}$.

Эдгээрээс,

а) хэрэв $\gamma_{11} = 0$ бол нэгдүгээр тэгшитгэл нь адилсах, хоёр ба гуравдугаар тэгшитгэл үл адилсах,

б) хэрэв $\beta_{21} = \gamma_{22} = 0$ бол нэг ба хоёрдугаар тэгшитгэл адилсах, гуравдугаар тэгшитгэл үл адилсах,

в) хэрэв $\gamma_{33} = 0$ бол нэг ба гуравдугаар тэгшитгэл адилсах, хоёрдугаар тэгшитгэл үл адилсах байна.

Бодлого 10.3. Дараах системийн тэгшитгэл бүрийг үнэлэх процедурыг бич:

$$\begin{cases} y_{1t} + \beta_{12}y_{2t} + \gamma_{11} + \gamma_{12}x_{2t} = \varepsilon_{1t} \\ y_{2t} + \gamma_{21} + \gamma_{23}x_{3t} = \varepsilon_{2t} \\ \beta_{32}y_{2t} + y_{3t} + \gamma_{31} + \gamma_{33}x_{3t} = \varepsilon_{3t} \end{cases}.$$

Бодолт. Бодлого 10.2–ын адилаар хүснэгтээ дүрслэе:

	y_{1t}	y_{2t}	y_{3t}	тогтмол	x_{2t}	x_{3t}
I тэгшитгэл	1	β_{12}	0	γ_{11}	γ_{12}	0
II тэгшитгэл	0	1	0	γ_{21}	0	γ_{23}
III тэгшитгэл	0	β_{32}	1	γ_{31}	0	γ_{33}

Бодлого 10.2–т хийсэн процедурыг хэрэглэвэл, хэдийгээр тэгшитгэл бүрийн хувьд

эрэмбийн нөхцөл биелэх боловч нэг, хоёрдугаар тэгшитгэл адилсах, гуравдугаар тэгшитгэл үл адилсах байна. Хамгийн бага квадратын хоёр алхамт арга ёсоор, эхний тэгшитгэлийг үнэлэхийн тулд y_{2t}–г x_{2t}, x_{3t} болон тогтмолоос хамааруулан регресс зохиож, $\widehat{y}_{2t}$ прогнозын утгыг олно. Дараа нь y_{1t}–г $\widehat{y}_{2t}$, x_{2t}, x_{3t} болон тогтмолоос хамааруулан регресс байгуулна. Хоёрдугаар тэгшитгэлийг үнэлэхэд y_{2t}–г x_{3t} болон тогтмолоос хамааруулан регресс байгуулахад хангалттай.

Бодлого 10.4. Доор өгөгдсөн тэгшитгэлийн системийг авч үзье:

$$\begin{cases} y_{1t} = \gamma_{10} & & +\beta_{12}y_{2t} & +\beta_{13}y_{3t} & +\gamma_{11}x_{1t} & +\gamma_{12}x_{2t} & & +\varepsilon_{1t} \\ y_{2t} = \gamma_{20} & +\beta_{21}y_{1t} & & & +\gamma_{21}x_{1t} & & & +\varepsilon_{2t} \\ y_{3t} = \gamma_{30} & +\beta_{31}y_{1t} & +\beta_{32}y_{2t} & & +\gamma_{31}x_{1t} & & +\gamma_{33}x_{3t} & +\varepsilon_{3t} \end{cases}$$

Системийн тэгшитгэл бүр адилсах уу? Эхний тэгшитгэлд хамгийн бага квадратын хоёр алхамт аргыг хэрэглэвэл яах вэ?

Бодолт. Хүснэгтээр дүрслэе (Бодлого 10.2).

	y_{1t}	y_{2t}	y_{3t}	тогтмол	x_{1t}	x_{2t}	x_{3t}
I тэгшитгэл	-1	β_{12}	β_{13}	γ_{10}	γ_{11}	γ_{12}	0
II тэгшитгэл	β_{21}	-1	0	γ_{20}	γ_{21}	0	0
III тэгшитгэл	β_{31}	β_{32}	-1	γ_{30}	γ_{31}	0	γ_{33}

Нэг, гуравдугаар тэгшитгэлүүд эрэмбийн нөхцлийг хангахгүй учир тэдгээр нь үл адилсах юм. Хоёрдугаар тэгшитгэл эрэмбийн болон рангийн нөхцлийг хангах тул адилсах байна.

Хэрэв эхний тэгшитгэлд хамгийн бага квадратын хоёр алхамт аргыг хэрэглэвэл коллинеар систем үүснэ.

Бүлэг 11

Регрессийн загварын хамгийн их үнэний хувь бүхий арга

Энэ бүлгийн эхний § 11.1–§ 11.4–р хэсэгт математик статистикийн аргын хэрэглээ болсон хамгийн их үнэний хувь бүхий (ХИҮХБ) аргын лавлах материалуудыг оруулаа. Өмнөх бүлгүүдэд, тухайлбал Бүлэг 2 ба Бүлэг 7–д энэ аргын тухай товч авч үзсэн байсан хэдий ч дараах 2 шалтгааны улмаас энэ бүлэгт дэлгэрүүлэн оруулсан болно. Нэгдүгээрт, оюутнуудын хувьд ХИҮХБ арга нь нэг талаас математик статистикийн уламжлалт хүндэвтэр сэдвүүдэд тооцогддог, нөгөө талаас хамааралтай дискрет хувьсагчид болон хугацааны цуваны сэдвүүдийг хамруулсан эконометрикийн курст ихээхэн хэрэглэгддэг зэргийг харгалзан давтан оруулах нь зүйтэй гэж үзсэн. Хоёрдугаарт, ХИҮХБ аргын шаардлагатай бүх баримт материалыг нэг дор оруулах нь уншигчдад эвтэйхэн байх болно.

11.1 Оршил

Хамгийн их үнэний хувь бүхий аргыг Бүлэг 2–ын (§ 2.7) хос регрессийн загварт, Бүлэг 7–ын алдааны векторууд нь нормал тархалттай, олон хүчин зүйлст регрессийн загварт тус тус хэрэглэж байсан билээ. Энэ бүлэгт хамгийн их үнэний хувь бүхий аргыг илүү дэлгэрэнгүй авч үзнэ. Эхлээд дараах хялбар жишээг авч үзье.

Бидэнд $B(n,p)$ гэсэн бином тархалттай түүвэр өгөгдсөн гэе. Үүнд $n=10$, p магадлал үл мэдэгдэх байг. Түүвэр нь долоон 1, гурван 0–ээс бүрддэг ба заавал дараалласан байх албагүй гэе. Нийт 10 туршилтаас 7 нь амжилттай явагдах магадлал

$$h(p) = C_{10}^7 p^7 (1-p)^3 \tag{11.1}$$

(11.1) функцийг хамгийн их утганд нь хүргэдэг p утгыг олохын тулд (11.1)-ийг логарифмчилж уламжлалыг нь олъё.

$$\frac{d \ln h(p)}{dp} = \frac{7}{p} - \frac{3}{1-p}, \tag{11.2}$$

Уламжлалыг тэгтэй тэнцүүлж, p параметрийн утгыг олбол $\widehat{p} = 0.7$. Энэ нь тухайн түүврийн хувьд $h(p)$ магадлал хамгийн их утгаа авах p–ийн холбогдол юм.

Илүү ерөнхий тохиолдолд авч үзье. y_i бүр нь 1 эсвэл 0 утга авах n ширхэг туршилтын утга $(y_1, y_2, ..., y_n)$ өгөгдсөн гэе. n удаа туршилт хийхэд x удаад нь амжилттай байх магадлал дараах томъёогоор олдоно.

$$C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \tag{11.3}$$

Энэ илэрхийллийг n, p параметрүүдийн өгөгдсөн утганд x–ээс хамаарсан функц мэтээр авч үзэх ба тархалт гэж нэрлэнэ. ХИҮХБ аргын дээрхээс ялгаатай нь (11.3)–ыг өгөгдсөн x–ийн хувьд p–ээс хамаарсан функц гэж үздэгт оршино. (11.3) функцийг үнэний хувь бүхий функц гэж нэрлэнэ (*likelihood function*).

Хамгийн их үнэний хувь бүхий арга нь конструктив арга юм. Дээр үзүүлсний адилаар хялбар тохиолдолд үнэлэлтийн ил томъёог олж болдог. Илүү нийлмэл тохиолдолд үнэлэлтийн ил томъёог олох боломжгүй боловч үнэний хувь бүхий функцийг максимумчлагч үнэлэлтийн тоон утгыг олж болно.

11.2 Математик аппарат

Ижил тархалттай юмуу эсвэл хамааралгүй байх албагүй санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүдийн дараалал $\{y_1, y_2, ...\}$–ийг авч үзье. $h_n(\cdot, \theta_0)$ нь $\boldsymbol{y} = (y_1, ..., y_n)$ санамсаргүй хэмжигдэхүүний хамтын тархалтын нягт байг. Энэ функцийн хэлбэр мэдэгдэж байна гэж үзээд θ_0 параметрийг үнэлэх ёстой. Параметрийн боломжит утгуудын олонлог Θ ($\theta_0 \in \Theta$) нь төгсгөлөг хэмжээст евклид огторгуйд харьяалагдана гэж үзнэ. $\boldsymbol{y}$ (бэхлэгдсэн) бүрийн хувьд

$$L_n(\theta) = L_n(\theta, \boldsymbol{y}) = h_n(\boldsymbol{y}, \theta), \qquad \theta \in \Theta, \tag{11.4}$$

гэсэн бодит утгатай функцийг *үнэний хувь бүхий функц* (*likelihood function*), түүний логарифм $\ln L_n(\theta)$–г *үнэний хувь бүхий логарифм функц* (*loglikelihood function*) гэж тус тус нэрлэнэ.

Бэхлэгдсэн $\boldsymbol{y}$–ийн хувьд

$$L_n(\widehat{\theta}_n(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = \sup_{\theta \in \Theta} L_n(\theta, \boldsymbol{y}), \tag{11.5}$$

байх дурын $\widehat{\theta}_n(\boldsymbol{y}) \in \Theta$ утгыг *хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт* (*maximum likelihood, ML estimate*) гэнэ.

Ерөнхий тохиолдолд, $\boldsymbol{y}$–ийн бүх утгуудын хувьд θ_0 параметрийн MLүнэлэлт орших баталгаа байхгүй. Хэрэв оршин байвал $\widehat{\theta}_n$ функцийг үл мэдэгдэх параметр θ_0–ийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт гэнэ.

$L_n(\theta)$ нь дифференциалчлагдах функц байгаад (11.5) функц параметрүүдийн огторгуй Θ–ийн дотоод цэг дээр хамгийн их утгандаа хүрэх үед $\partial \ln L_n(\theta)/\partial\theta$ тухайн уламжлал энэ цэг дээр тэгтэй тэнцэнэ. Тэгвэл $\widehat{\theta}_n$ нь $\partial \ln L_n(\theta)/\partial\theta = 0$ вектор тэгшитгэлийн шийд болно.

$L_n(\theta)$ функц θ–өөр 2 удаа дифференциалчлагдах тохиолдолд түүний Гессийн матриц (*Hessian matrix*)

$$H_n(\theta) = \frac{\partial^2 \ln L_n(\theta)}{\partial\theta\, \partial\theta'} \tag{11.6}$$

гэж тодорхойлогдох ба

$$F_n(\theta_0) = -\mathrm{E}(H_n(\theta_0)) \tag{11.7}$$

матрицыг θ_0 цэг дээрх мэдээллийн матриц гэнэ. Мэдээллийн матриц нь θ_0 параметрийн жинхэнэ утга дээр бодогдсон гэдгийг тэмдэглэе. Хэрэв доорх хязгаар оршин байвал түүнийг θ_0 параметрийн мэдээллийн асимптотлог матриц гэнэ.

$$F(\theta_0) = \lim_{n\to\infty}(1/n)F_n(\theta_0) \tag{11.8}$$

Хэрэв $F(\theta_0)$ матриц эерэг тодорхойлогдсон бол түүний урвуу $F^{-1}(\theta_0)$ нь θ_0 параметрийн дурын зохимжтой үнлэлтийн ковариацийн асимптотлог матрицын доод зааг болно(Рао-Крамерийн хязгаарын тэнцэл биш). Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийн ковариацийн матриц зарим регуляр нөхцлийн үед энэ доод зааг руу нийлдэг. Иймд $F^{-1}(\theta_0)$–ийг хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт $\widehat{\theta}$–ийн ковариацийн асимптотлог матриц гэнэ. Зарим регуляр нөхцлийн үед санамсаргүй векторуудын дараалал

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta_0) \tag{11.9}$$

нь тархалтаараа, тэг дундаж ба $F^{-1}(\theta_0)$ ковариацийн матриц бүхий нормал тархалттай санамсаргүй вектор уруу нийлнэ.

11.3 Олон хэмжээст нормал тархалтын параметрүүдийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

$\mu = (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_m)'$ математик дундаж, $\sigma^2\boldsymbol{I}_m$ ковариацийн матриц бүхий олон хэмжээст нормал тархалттай түүвэр авч үзье. Санамсаргүй векторуудын n ажиглалтын утгыг $y_1, y_2, ..., y_n$ гэе. Ажиглалт бүрийн хувьд нягтын функцийг бичвэл

$$h(y_i) = (2\pi)^{-m/2}(\sigma^2)^{-m/2}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(y_i-\mu)'(y_i-\mu)}{\sigma^2}\right)\right\}. \tag{11.10}$$

(11.10) илэрхийллийн логарифмаас ажиглалтын бүх n утгуудаар нийлбэр авбал үнэний хувийн логарифм функц үүснэ.

$$\ln L = -\frac{nm}{2}\ln 2\pi - \frac{nm}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_i (y_i-\mu)'(y_i-\mu). \tag{11.11}$$

Энэ функцийг тархалтын μ, σ^2 параметрүүдээр нь дифференциалчилбал дараах тэгшитгэл үүснэ (экстремум орших зайлшгүй нөхцөл).

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_i (y_i-\mu) = 0 \tag{11.12}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{nm}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_i (y_i-\mu)'(y_i-\mu) = 0 \tag{11.13}$$

(11.12)–(11.13) системийг бодвол хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт олдоно:

$$\widehat{\mu}_j = \overline{y}_j, \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum_j\sum_i (y_{ji}-\overline{y}_j)^2}{nm}. \tag{11.14}$$

Үүнд, y_{ji} нь y_i векторын j–р компонент $\overline{y}_j = (1/n)\sum\limits_{i=1}^{n} y_{ji}$.

11.4 Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийн чанарууд

Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт асимптотлог чанараараа сонирхол татдаг. Ерөнхий тохиолдолд, хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт дараах 4 чанарыг хангана.

1. ***Инвариант чанар.*** θ параметрийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт нь $\widehat{\theta}$, $g(\theta)$ –тасралтгүй функц байг. Тэгвэл $g(\widehat{\theta})$ нь $g(\theta)$ параметрийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт болно.

Тухайлбал, нь $\widehat{\sigma}^2$ нь σ^2–ийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт ((11.13)–ыг үз) болно гэдгээс $\widehat{\sigma}$, $1/\widehat{\sigma}$ нь харгалзан σ ба $1/\sigma$–ийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт болох нь шууд мөрднө. Инвариантын энэхүү чанараас, хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт ерөнхий тохиолдод хазайлттай болох нь мөрднө.

Инвариант чанар нь төгсгөлөг түүврийн хувьд биелэх бөгөөд хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт хязгаартаа дараах 3 чанарыг хангана.

2. *Зохимжтой чанар.* $\boldsymbol{p}\lim \widehat{\theta} = \theta$ тэнцэтгэл биелнэ. Өөрөөр хэлбэл дурын $\varepsilon > 0$ хувьд $n \to \infty$ үед $P(|\widehat{\theta} - \theta| > 0) \longrightarrow 0$. Зохимжтой чанар нь ерөнхийдөө өөр бусад үнэлэлтийн чанаруудаас нилээд чухал бөгөөд бодлого бодох явцад байнга тааралдах нь элбэг. Өөрөөр хэлбэл, зохимжтой чанар нь ямар ч үнэлэлтэнд тавигдах минимум шаардлага юм. $\widehat{\theta}$ зохимжтой үнэлэлт бол тэрээр параметрүүдийн жинхэнэ утга θ–рүү нийлнэ: $\widehat{\theta} \xrightarrow{d} \theta$. Өөрөөр хэлбэл, $(\widehat{\theta} - \theta)$ ялгавар магадлалаараа тэгрүү тэмүүлнэ гэсэн үг. Энэ тохиолдолд, үнэлэлтийг нарийвчлан авч үзэхийн тулд нормчлогдсон үнэлэлт нь хязгаартаа үл бөхөх тархалттай байхаар тохирох нормчлолыг хийдэг.

Дараах тухайн тохиолдлыг авч үзье. $N(\mu, \sigma^2)$ гэсэн нормал тархалттай $y_1, ..., y_n$ түүвэр байг. Тэгвэл $\bar{y}$ нь μ–ийн зохимжтой үнэлэлт болно. Иймд $\bar{y} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. Өөрөөр хэлбэл, $\sqrt{n}(\bar{y} - \mu) \sim N(0, \sigma^2)$. Тэгвэл $\sqrt{n}(\bar{y} - \mu) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$. Манай тохиолдолд нормчлогдсон үнэлэлтийн тархалт n–ээс үл хамаарах ба хязгаарын тархалттайгаа тэнцүү байна.

3. *Хязгаартаа нормал чанар.* Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт хязгаартаа дараах төлөв байдлыг үзүүлнэ.

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, F^{-1}(\theta)) \tag{11.15}$$

Үүнд, $F(\theta)$–мэдээллийн асимптотлог матриц. Харин $\sqrt{n}(\widehat{\theta} - \theta)$ хэмжигдэхүүний асимптотлог тархалтын ковариацийн матриц нь $F^{-1}(\theta)$ юм. $\widehat{\theta}$–ийн өөрийнх нь ковариацийн матрицын үнэлэлт $\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\theta}) = F_n^{-1}(\widehat{\theta}) = (1/n)F^{-1}(\widehat{\theta})$ болно.

4. *Хязгаартаа эрчимтэй чанар.* Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт хязгаартаа эрчимтэй. Энэ нь, хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт $\widehat{\theta}$–г зохимжтой бөгөөд хязгаартаа нормал тархалттай, дурын $\widetilde{\theta}$–тай үнэлэлттэй харьцуулбал $\mathrm{V}(\widehat{\theta}) \leq \mathrm{V}(\widetilde{\theta})$ байна гэсэн үг. Өөрөөр хэлбэл, $\mathrm{V}(\widehat{\theta}) - \mathrm{V}(\widetilde{\theta})$ ялгавар сөрөг биш тодорхойлогдсон матриц байна. Тухайн тохиолдолд $\widetilde{\theta}$ векторын компонет бүрийн дисперс нь $\widehat{\theta}$ векторын компонет бүрийн дисперсээс багагүй байна гэсэн үг.

11.5 Шугаман загвар дахь хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

Регрессийн үлдэгдэл нь нормал тархалттай байх стандарт шугаман загварыг авч үзье.

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{u}, \qquad u \sim N(0, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n) \tag{11.16}$$

Эквивалент хэлбэрээр бичвэл

$$\boldsymbol{y} \sim N(\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \boldsymbol{I}_n). \tag{11.17}$$

Санамсаргүй вектор $\boldsymbol{y}$–ийн нягтын функц дараах хэлбэртэй байна.

$$h(\boldsymbol{y}) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})}{\sigma^2} \right\} \tag{11.18}$$

Үнэний хувийн логарифм функц нь $\boldsymbol{\beta}$, σ^2 параметрүүдээс хамаарна:

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2} \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})}{\sigma^2}. \tag{11.19}$$

Энэ фукцийн I эрэмбийн тухайн уламжлалуудыг олъё.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}'} &= \frac{1}{\sigma^2} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})' X, \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})}{2\sigma^4} \end{aligned} \tag{11.20}$$

I эрэмийн тухайн уламжлалууд (11.20)–ыг тэгтэй тэнцүүлэн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийг олбол

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}'\boldsymbol{y}, \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}{n}, \tag{11.21}$$

Үүнд, $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$–үлдэгдлүүдийн вектор. Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ нь $\boldsymbol{\beta}$–ийн хувьд ХБК-үнэлэлттэй давхцах боловч хамгийн их үнэний хувь бүхий $\widehat{\sigma}^2$ үнэлэлт түүний ХБК-үнэлэлт $s^2 = \boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}/(n-k)$–тай үл давхцана.

(11.19)–ийн II эрэмбийн тухайн уламжлалуудыг олъё

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} = -\frac{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}}{\sigma^2}, \qquad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \sigma^2 \partial \boldsymbol{\beta}'} = -\frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}'\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{X}}{\sigma^4}, \tag{11.22}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{(\partial \sigma^2)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta})}{\sigma^6}. \tag{11.23}$$

II эрэмбийн уламжлалуудын математик дунджийг бодвол

$$-\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} \right) = \frac{\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}}{\sigma^2}, \qquad -\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{(\partial \sigma^2)^2} \right) = \frac{n}{2\sigma^4}, \tag{11.24}$$

Энд, $\mathrm{E}((\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}))=n\sigma^2$ болохыг тэмдэглэе. Мөн холимог уламжлалын математик дундаж тэгтэй тэнцүү, учир нь $\mathrm{E}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})=\mathbf{0}$. Эндээс мэдээллийн матриц дараах байдлаар илэрхийлэгдэнэ.

$$F_n(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)=\begin{bmatrix}(1/\sigma^2\boldsymbol{X'X}) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & n/(2\sigma^4)\end{bmatrix} \tag{11.25}$$

Иймээс мэдээллийн асимптотлог матриц нь дараах хязгаараар тодорхойлогдоно.

$$F(\boldsymbol{\beta},\sigma^2)=\lim_{n\to\infty}(1/n)F_n\begin{bmatrix}(1/\sigma^2)\boldsymbol{Q} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 1/(2\sigma^4)\end{bmatrix} \tag{11.26}$$

Энэ тохиолдолд эерэг тодорхойлогдсон $\boldsymbol{Q}=\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)\boldsymbol{X'X}$ матриц оршино гэж үзнэ. Дээрх матрицын урвууг бодвол

$$F^{-1}=\begin{bmatrix}\sigma^2\boldsymbol{Q}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & 2\sigma^4\end{bmatrix} \tag{11.27}$$

Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийн чанар ёсоор $(\sigma^2/n)\boldsymbol{Q}^{-1}$ нь $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$–ийн ковариацийн асимптотлог матрицын үнэлэлт болно. Практикт ковариацийн асимптотлог $\widehat{\sigma}^2(\boldsymbol{X'X})^{-1}$ утганд дөхдөг. Үнэн хэрэг дээрээ $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ векторын ковариацийн жинхэнэ матриц нь $\sigma^2(\boldsymbol{X'X})^{-1}$ болохыг бид мэднэ. Харин $\widehat{\sigma}^2$ дисперсийн үнэлэлт хязгаартаа $2\widehat{\sigma}^4/n$ байна. Яагаад гэвэл F матрицын диагоналийн гаднах блокууд нь тэгтэй тэнцүү, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ ба $\widehat{\sigma}^2$ үнэлэлт хязгаартаа хамааралгүй. Дундаж утга ба дисперсийн хувьд хязгаартаа хамааралгүй байх энэ чанар нь регрессийн онолын ерөнхий онцлог бөгөөд параметрийг үнэлэх болон, тест шалгахад чухал нөлөө үзүүлнэ.

11.6 Шугаман загварт таамаглал шалгах, I

Алдааны ковариацийн матриц нь $\mathrm{V}(\boldsymbol{u})=\Omega$ байх $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{u}$ өргөтгөсөн шугаман загвар авч үзье. Үүнд, $\boldsymbol{\Omega}$ –мэдэгдэж буй эерэг тодорхойлогдсон, тэгш хэмт матриц. Бид q $(q<k)$ тооны үл хамаарах шугаман хязгаалалуудын систем $\boldsymbol{R\beta}=\boldsymbol{r}$ биелнэ гэсэн таамаглал шалгах гэж байгаа гэе. Энд, $\boldsymbol{R}$ нь q рангтай, $q\times k$ хэмжээст мэдэгдэж буй матриц, $\boldsymbol{r}$ нь $q\times 1$ хэмжээст мэдэгдэж буй вектор. Энэ хэсэгт дээрх таамаглалыг шалгах 3 өөр тест авч үзэх болно.

Үнэний хувийн логарифм функцийг бичье.

$$\ln L(\boldsymbol{\beta})=\mathrm{const}+\frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Omega}^{-1}|-\frac{1}{2}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta})'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}), \tag{11.28}$$

түүний I эрэмбийн тухайн уламжлал болон мэдээллийн матрицыг олбол

$$\frac{\partial\ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{X\beta}) \tag{11.29}$$

$$F(\boldsymbol{\beta})=-\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2\ln L(\boldsymbol{\beta})}{\partial\boldsymbol{\beta}\partial\boldsymbol{\beta}'}\right)=\boldsymbol{X'\Omega}^{-1}\boldsymbol{X} \tag{11.30}$$

Зааглалгүй регрессийн $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн ML-үнэлэлт $\partial \ln L(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta} = 0$ тэгшитгэлээр өгөгддөг. Эндээс GLS үнэлэлт дараах хэлбэртэй болно.

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{11.31}$$

Регрессийн үлдэгдлүүдийн вектор $\widehat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$–тай тэнцүү тул үнэний хувийн логарифм функцийн харгалзах хамгийн их утга:

$$\ln L(\widehat{\boldsymbol{\beta}}) = \text{const} + \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Omega}^{-1}| - \frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{u}'\Omega}^{-1}\widehat{\boldsymbol{u}}. \tag{11.32}$$

Зааглалтай ($\boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{r}$) регрессийн $\boldsymbol{\beta}$ параметрийн ML-үнэлэлтийг $\ln L(\boldsymbol{\beta})$ функцийн $\boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{r}$ нөхцөлийг хангах нөхцөлт экстремумын бодлогоос олно. Энэхүү үнэлэлтийг олохын тулд Лагранжийн функийг бичъе:

$$\psi(\boldsymbol{\beta}) = \ln L(\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\ell}'(\boldsymbol{R\beta} - \boldsymbol{r}). \tag{11.33}$$

Үүнд, $\boldsymbol{\ell} = (\ell_1, ..., \ell_q)'$–ээр ($q$ хэмжээст) Лагранжийн үржигдэхүүнийг тэмдэглэв. Экстремумын нөхцлийг бичвэл

$$\partial\psi(\boldsymbol{\beta})/\partial\boldsymbol{\beta} = 0, \qquad \boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{r} \tag{11.34}$$

эсвэл

$$\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) - \boldsymbol{R}'\boldsymbol{\ell} = 0, \qquad \boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{r} \tag{11.35}$$

(11.35) системийн шийдийг харгалзан $\widetilde{\beta}$ ба $\widetilde{\ell}$ гэж тэмдэглэвэл.

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\widetilde{\boldsymbol{\ell}} \tag{11.36}$$

Иймд

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - (\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}')\widetilde{\boldsymbol{\ell}} \tag{11.37}$$

(11.37) тэгшитгэлээс $\widetilde{\boldsymbol{\ell}}$–г илэрхийлбэл

$$\widetilde{\boldsymbol{\ell}} = (\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}')^{-1}(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}). \tag{11.38}$$

Энэ илэрхийллийг (11.36)–д орлуулан зааглал бүхий регрессийн $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ үнэлэлтийг олбол:

$$\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} - (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}')^{-1}(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}). \tag{11.39}$$

Зааглал бүхий регрессийн үлдэгдлийн векторыг $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ гэе. Тэгвэл үнэний хувийн логарифм функц $\ln L(\boldsymbol{\beta})$–ийн хамгийн их утга:

$$\ln L(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}) = \text{const} + \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Omega}^{-1}| - \frac{1}{2}\widetilde{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{u}}. \tag{11.40}$$

Одоо дээр хэлсэн 3 тестийг томьёолъё. Эдгээр бүх тестэд $\mathbf{H}_0$ нь "$\boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{r}$ зааглал биелнэ" гэсэн таамаглал болно.

Вальдийн (Wald) тест. $\mathbf{H}_0$ таамаглал биелэх үед $\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ вектор, $\boldsymbol{r}$ векторт ойрхон байх ёстой гэсэн санаан дээр Вальдийн тест (W) үндэслэгдэнэ. (11.31)–ээс

$$\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r} \sim N(\boldsymbol{R\beta} - \boldsymbol{r},\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'). \tag{11.41}$$

Иймд хэрэв $\mathbf{H}_0$ таамаглал биелэх бол

$$\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r} \sim N(0,\ \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'). \tag{11.42}$$

Нормал тархалтын чанарыг ашиглавал

$$W \equiv (\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}v} - \boldsymbol{r})'(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}')^{-1}(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) \sim \chi^2(q) \tag{11.43}$$

Вальдийн тест зөвхөн, парамерүүдэд нь зааглалгүй загварын үнэлэлтийг ашигладаг болохыг тэмдэглэе.

Лагранжийн (Lagrange) үржигдэхүүний тест. $\mathbf{H}_0$ таамаглал биелэх үед Лагранжийн бүх үржигдэхүүн тэгтэй тэнцүү байх ёстой, иймд учраас $\widetilde{\boldsymbol{\ell}}$ вектор тэгд ойр байна гэсэн санаан дээр Лагранжийн үржигдэхүүний тест (LM) үндэслэнэ. Тэг таамаглал биелэх тохиолдолд (11.38) ба (11.41)–ээс

$$\widetilde{\boldsymbol{\ell}} \sim N(0, (\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}')^{-1})) \tag{11.44}$$

Тиймээс

$$LM \equiv \widetilde{\boldsymbol{\ell}}'\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\widetilde{\boldsymbol{\ell}} \sim \chi^2(q). \tag{11.45}$$

Лагранжийн тест Вальдийн тестээс ялгагдах ялгаа нь зөвхөн параметрүүд нь зааглал бүхий загварын үнэлэлтийг ашигладагт оршино.

Үнэний хувийн харьцааны (Likelihood ratio) тест. Үнэний хувийн харьцааны тестэд зааглалтай болон зааглалгүй регрессүүдийг ашиглана. Хэрэв зааглал үнэн бол зааглалтай болон зааглалгүй регрессүүдийн үнэний хувийн функцийн хамгийн их утгуудын харьцаа нэгд ойрхон байх ёстой гэсэн санаан дээр энэ тест (LR) үндэслэнэ. Иймээс статистик шинжүүрийн критик утгын оронд үнэний хувийн логарифм функцүүдийн хамгийн их утгын ялгаварыг авдаг. (11.32) ба (11.40)–өөс

$$LR \equiv -2(\ln L(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}) - \ln L(\widehat{\boldsymbol{\beta}})) = \widetilde{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{u}} - \widehat{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widehat{\boldsymbol{u}}. \tag{11.46}$$

Тэг таамаглал биелэх үед (11.46) нь $\chi^2(q)$ тархалттай болохыг харуулж болно. Үнэхээр $\boldsymbol{X}\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widetilde{\boldsymbol{\beta}})$ учраас $\widetilde{\boldsymbol{u}} = \widehat{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widetilde{\boldsymbol{\beta}})$. $\boldsymbol{\Omega}^{-1/2}$–оор үржүүлбэл.

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{\Omega}^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\Omega}^{-1/2}\boldsymbol{X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widetilde{\boldsymbol{\beta}}) \tag{11.47}$$

(11.47)–ийн хоёр талаас скаляр квадрат авч $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widehat{\boldsymbol{u}} = 0$ ((11.31)–ийг үз) болохыг тооцвол:

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{u}} = \widehat{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widehat{\boldsymbol{u}} + (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widetilde{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widetilde{\boldsymbol{\beta}}). \tag{11.48}$$

(11.36)–аас

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widetilde{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\widetilde{\boldsymbol{\ell}} \tag{11.49}$$

гэж мөрдөх ба (11.45) ёсоор

$$LR = \widetilde{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{u}} - \widehat{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\widehat{\boldsymbol{u}} = \widetilde{\boldsymbol{\ell}}'\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}'\widetilde{\boldsymbol{\ell}} \sim \chi^2(q). \tag{11.50}$$

Бидний дээр авч үзсэн 3 статистик бүгд $\chi^2(q)$ тархалттай болох нь харагдаж байна. Цаашилбал (11.50)–иас $LR = LM$, (11.38)–аас $W = LM$ гэж мөрдөх тул

$$LM = LR = W \tag{11.51}$$

Энэ нөхцөл алдааны ковариацийн матриц $\boldsymbol{\Omega}$ бүрэн мэдэгдэж байгаа тохиолдолд биелнэ. Харин $\boldsymbol{\Omega}$ матриц үл мэдэгдэх үед байдал хүндэрнэ.

11.7 Шугаман загварт таамаглал шалгах, II

Одоо $\boldsymbol{\Omega}$ матриц үл мэдэгдэх боловч бүтэц нь мэдэгдэж байгаа гэж үзье. Өөрөөр хэлбэл, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta})$ нь $q \times 1$ хэмжээст үл мэдэгдэх вектор-параметр $\boldsymbol{\theta}$–өөс хамаарсан функц гэе. Харин бид $\boldsymbol{\theta}$ параметрийг үнэлэх шаардлагатай (Энэ тухай Бүлэг 7–д авч үзсэн). Энэ тохиолдолд өмнө авч үзсэн 3 статистик дараах хэлбэртэй болно:

$$W = (\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}')^{-1}(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}), \tag{11.52}$$

$$LM = \widetilde{\boldsymbol{u}}'\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{u}}, \tag{11.53}$$

$$LR = -2(\ln L(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}) - \ln L(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})), \tag{11.54}$$

Үүнд, $\widehat{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \boldsymbol{\Omega}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$, $\widetilde{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \boldsymbol{\Omega}(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})$. ($\boldsymbol{X}'\widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{R}'\widetilde{\boldsymbol{\ell}}$ нөхцлийг ашиглан LM сатистикийг өөр хэлбэртэй бичсэн.) Одоо дараах алдартай тэнцэтгэл биш биелэхийг харуулъя

$$LM \leq LR \leq W. \tag{11.55}$$

Баталгаа нь Бреушийн (Breuch, 1979) нилээн нарийн санамжууд дээр үндэслэнэ.

Эхлээд, $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{r}$ зааглал бүхий $\ln L(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}})$ функцийн нөхцөлт максимумийн цэг нь $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$, $\ln L(\boldsymbol{\beta}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$ функцийн максимумын цэг нь $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ болохыг тэмдэглэе. Хоёр шинэ вектор оруулъя: $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{r}$ зааглал бүхий $\ln L(\boldsymbol{\beta}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$ функцийн нөхцөлт максимумын цэг $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r$, $\ln L(\boldsymbol{\beta}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}})$ функцийн максимумын цэг $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_u$ байг. Өмнөх хэсэгт ($\boldsymbol{\theta}$ мэдэгдэж буй тохиолдолд) гаргасан тэнцэтгэл нь W, LM статистикуудыг LR статистикийн адилаар илэрхийлэх боломж олгоно.

$$W = -2\left(\ln L(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r, \widehat{\boldsymbol{\theta}}) - \ln L(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})\right) \tag{11.56}$$

$$LM = -2\left(\ln L(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}) - \ln L(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_u, \widetilde{\boldsymbol{\theta}})\right) \tag{11.57}$$

Түүнчлэн үнэний хувийн харьцааны статистик нь мөн дараах байдлаар бичигдэнэ.

$$LR = -2\left(\ln L(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}) - \ln L(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})\right) \tag{11.58}$$

Эндээс

$$LR - LM = 2\left(\ln L(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}}) - \ln L(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}_u, \widetilde{\boldsymbol{\theta}})\right) \geq 0 \tag{11.59}$$

$$W - LR = 2\left(\ln L(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}) - \ln L(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_r, \widehat{\boldsymbol{\theta}})\right) \geq 0 \tag{11.60}$$

Иймд $LM \leq LR \leq W$ болж батлагдана.

Энэ тэнцэтгэл биш тэг таамаглалын нөхцөлд биелэнэ. Төсгөлөг түүврийн хувьд хэрэв, нэг ижил критик утгыг ашиглавал тестийн итгэх түвшин янз бүр байна. Дээрх тэнцэтгэл биш нь W, LR ба LM тестийн харьцуулсан чадлын талаар ямар ч мэдээллийг үл өгнө (энэ тайлбарын тухай дэлгэрэнгүй мэдэхийг хүсвэл Evans and Savin-1982 ба Godfrey-1988 нарын ажлыг үзэхийг зөвлөж байна).

11.8 Шугаман биш заагалалууд

Тэг таамаглал q тооны шугаман бус заагалалуудын системээс тогтог гэе. Алдааны векторууд нь $u \sim N(0, \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\theta}))$ тархалт бүхий стандарт нөхцөлтэй өгөгдсөн гэе. Заагалалыг дараах хэлбэртэй бичье

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta}) = 0 \tag{11.61}$$

Иймд бид $\mathbf{H}_0 : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta}) = 0$ тэг таамаглалыг $\mathbf{H}_1 : \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta}) \neq 0$ гэсэн өрсөлдөгч таамаглалын нөхцөлд шалгана гэсэн үг. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\beta})$ векторын бүх q компонент нь хоёр удаа тасралтгүй дифференциалчлагдах функцүүд байг. I эрэмбийн уламжлалын $q \times k$ матрицыг $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\beta})$ гэж тэмдэглэн $\boldsymbol{\beta}$–ийн жинхэнэ утгын ямар нэг орчинд гүйцэд рангтай гэж үзье.

Үнэний хувийн логарифм функц

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\theta}) = \text{const} + \frac{1}{2} \ln |\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\theta})| - \frac{1}{2}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})' \boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\theta})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}). \tag{11.62}$$

Өмнө авч үзсэний адилаар заагалалгүй хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийг $(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$ заагалалтай үнэлэлтийг $(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}})$ гэж тэмдэглэе. Хялбар хувиргалт хийсний дараа гурван статистикийг дараах хэлбэртэй бичиж болно:

$$W = \boldsymbol{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})' \left(G(\widehat{\boldsymbol{\beta}})(\boldsymbol{X}' \widehat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{G}(\widehat{\boldsymbol{\beta}})' \right)^{-1} \boldsymbol{g}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}), \tag{11.63}$$

$$LM = \widetilde{\boldsymbol{u}}' \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \boldsymbol{X} (\boldsymbol{X}' \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{X}' \widetilde{\boldsymbol{\Omega}}^{-1} \widetilde{\boldsymbol{u}}, \tag{11.64}$$

$$LR = -2(\ln L(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}) - \ln L(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})) \tag{11.65}$$

((11.52)–(11.54) илэрхийлэлтэй жишиж үз). Шугаман биш заагалалын $LM \leq LR$ нөхцөл биелэх боловч $LR \leq W$ нөхцөл биелэгдэхгүй болохыг Бреуш (Breush, 1979) баталсан.

Төгсгөлд нь Вальдийн статистиктай холбоотой зарим нэг асуудалд анхаарал хандуулъя. Нэг ижил заагалалыг маш олон янзаар бичиж болдогт хэргийн гол учир оршино.

Жишээлбэл дараах хялбар загварын хувьд

$$\boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \beta_2 \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{u} \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 \boldsymbol{I}) \tag{11.66}$$

$\beta_1 = \beta_2$ нөхцлийг шалгах зорилго тавъя, заагалалыг илэрхийлэх функцийг $g_1(\boldsymbol{\beta}) = \beta_1 - \beta_2$ эсвэл $g_2(\boldsymbol{\beta}) = (\beta_1/\beta_2) - 1$ гэсэн эквивалент хэлбэртэй бичиж болно. Үүнээс ч өөр олон янзаар бичиж болно. Заагалал байгаа тохиолдолд g_1, g_2 функцийн утгууд давхцах боловч аргументын бусад утгуудад өөр хоорондоо ялгагдана. g_1, g_2 функцийн уламжлалууд нь:

$$\boldsymbol{G}_1(\boldsymbol{\beta}) = (1, -1) \qquad \boldsymbol{G}_2 = \left(\frac{1}{\beta_2}, \frac{-\beta_1}{\beta_2^2} \right). \tag{11.67}$$

Тэгвэл Вальдийн тестийн критик утгууд дараах хэлбэртэй болно:

$$W_i = \frac{(\widehat{\beta}_1 - \widehat{\beta}_2)^2}{\widehat{\sigma}^2 \boldsymbol{d}_i' (\boldsymbol{X}' \boldsymbol{X})^{-1} \boldsymbol{d}_i}, \qquad (i = 1, 2). \tag{11.68}$$

Үүнд,

$$\boldsymbol{d}_1' = (1, -1), \qquad \boldsymbol{d}_2' = (1, -(\widehat{\beta}_1/\widehat{\beta}_2)). \tag{11.69}$$

Эндээс үзвэл, Вальдийн тестийн критик утга нь тэг таамаглалыг эквивалентаар хувиргах харьцааны хувьд инвариант биш байдгаараа LR, LM-статистикуудаас ялгагдаж байна. Үүний шалтгаан нь Вальдийн статистикийн критик утга зааглагч векторын ($\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ цэг дээрх) шугаман дөхөлтөөр олддогт оршино. Өөрөөр хэлбэл, зааглагч илэрхийллийн янз бүрийн хэлбэр нь янз бүрээр шугамчлахад хүргэдэг байна. Энэ ялгаа төгсгөлөг түүврүүдийн хувьд мэдэгдэхүйц боловч хязгаарын тохиолдолд арилдаг байна.

11.9 Бататгах дасгал, бодлого

Бодлого 11.1. θ параметр бүхий Пуассоны тархалттай хэмжигдэхүүний 10 хэмжээт түүвэр өгөгдсөн: 1, 4, 3, 2, 3, 0, 1, 1, 0, 5.

а) θ параметрийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийг ол.

б) Үнэний хувийн болон үнэний хувийн логарифм функцууд нэг ижил θ цэг дээр хамгийн их утгандаа хүрнэ гэдгийг графикаар үзүүл.

Бодолт. а) Түүврийн y_i утгын хувьд тархалтын нягт:

$$h(y_i, \theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{y_i}}{y_i!}.$$

Эндээс үнэний хувийн функц нь:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{10} h(y_i, \theta) = \frac{e^{-10\theta}\theta^{\sum y_i}}{\prod y_i!} = \frac{e^{-10\theta}\theta^{20}}{207360}.$$

Үнэний хувийн логарифм функц:

$$\ln L(\theta) = -10\theta + 20\ln\theta - \ln 207360.$$

Үнэний хувийн функцийн максимум утгыг олохын тулд тухайн уламжлалыг тэгтэй тэнцүүлье:

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -10 + \frac{20}{\theta} = 0.$$

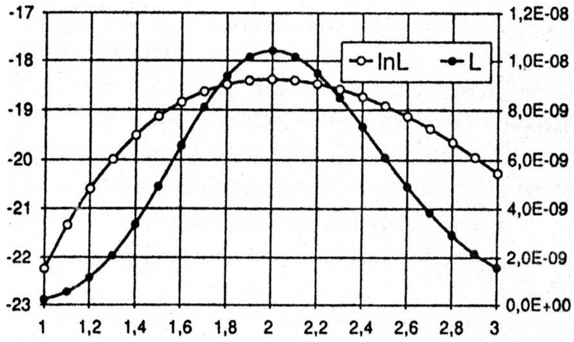
Эндээс хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт нь $\widehat{\theta} = 2$.

б) Зураг 11.1.

Бодлого 11.2. $N(\mu, \sigma^2)$ тархалттай n хэмжээт түүвэр өгөгдсөн гэе. Тэгвэл үнэний хувийн логарифм функцийг бичиж μ болон σ^2 параметрүүдийн ML-үнэнлэлийг ол. Эдгээр үнэлэлтийн хазайлтыг ол.

Бодолт. Ажиглалтын y_i утга бүрийн хувьд нягтын функц нь:

$$h(y_i; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$



Зураг 11.1: Тренд

Үнэний хувийн функц:

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod h(y_i;\mu,\sigma^2)=(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i-\mu)^2\right\},$$

логарифмчилбал

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln 2\pi-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i-\mu)^2.$$

Үнэний хувийн функцыг максимумчлахын тулд μ, σ^2 параметрүүдээр нь уламжлал авч тэгтэй тэнцүүлнэ:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum(y_i-\mu)=0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2}=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum(y_i-\mu)^2=0.$$

Тэгшигэлийн системийг бодож хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийг олбол:

$$\widehat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\overline{y},\qquad \widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2.$$

Үнэлэлтийн математик дундаж нь:

$$\mathrm{E}(\widehat{\mu})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(y_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu=\mu,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\widehat{\sigma^2})&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(y_i-\overline{y})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(y_i-\overline{y})=\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{V}(y_i)+\mathrm{V}(\overline{y})-2\mathrm{Cov}(y_i,\overline{y})=\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\sigma^2+\frac{1}{n}\sigma^2-2\frac{1}{n}\sigma^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2.\end{aligned}$$

Үнэлэлтийн хазайлт нь харгалзан:

$$\mathrm{bias}(\widehat{\mu}) = \mathrm{E}(\widehat{\mu}) - \mu = 0, \qquad \mathrm{bias}(\widehat{\sigma}^2) = \mathrm{E}(\widehat{\sigma}^2 - \widehat{\sigma^2}) = -\frac{1}{n}\sigma^2.$$

Бодлого 11.3. $y_1, y_2, ..., y_n$ нь $h(y,\theta) = \begin{cases} 1/\theta, & 0 < y \le \theta; \\ 0, & \text{бусад тохиолдолд} \end{cases}$ $(0 < \theta < \infty)$ нягт бүхий тархалтаас авсан түүвэр. $\widehat{\theta} = \max y_i$ хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт болохыг харуулж, түүний хазайлтыг ол.

Бодолт. Бодлогын нөхцөл ёсоор $y_1, y_2, ..., y_n$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд хамааралгүй бөгөөд $(0, \theta]$ завсарт жигд тархалттай. Тэгвэл y санамсаргүй хэмжигдэхүүний тархалтын функц дараах хэлбэртэй байна:

$$F_y(z) = \frac{z}{\theta}, \qquad 0 < \theta \le \theta$$

($z \le 0$ үед $F_y(z) = 0$, $z > 0$ үед $F_y(z) = 1$). Үнэний хувийн функц:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} h(y_i, \theta) = \frac{1}{\theta^n}, \qquad 0 < y_i \le \theta,$$

бусад y_i–ийн хувьд тэгтэй тэнцэнэ.

θ өсөх тутам L монотон буурч байна. Энэ функцийн максимумыг дифференциалчлах аргаар олох боломжгүй. Харин боломжит утгуудын хамгийн багаар θ–г сонгох нь ойлгомжтой. Бүх i–ийн хувьд $\theta \ge y_i$ тул $\theta \ge \max y_i$ гэсэн үг. Энэ тохиолдолд хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт:

$$\widehat{\theta} = \max y_i.$$

$\widehat{\theta}$ үнэлэлтийн математик дундаж болон дисперсийг олохын тулд тархалтын функц $F(z)$, нягтын функц $f(z)$–ийг тус тус олъё:

$$F(z) = P(\widehat{\theta} \le z) = P(\max y_i \le z) = \prod_{i=1}^{n} P(y_i \le z) = \left(\frac{z}{\theta}\right)^n = \theta^{-n} z^n$$

(y_i үл хамаарах гэдгийг ашиглав). Дээрх функцийг дифференциалчилж тархалтын нягтын функцийг олбол:

$$f(z) = F'(z) = n\theta^{-n} z^{n-1}.$$

Эндээс

$$\mathrm{E}(\widehat{\theta}) = \mathrm{E}(\max y_i) = \int_0^\theta z f(z) dz = n\theta^{-n} \int_0^\theta z\; z^{n-1} dz = \theta \frac{n}{n+1},$$

$$\mathrm{E}(\widehat{\theta}^2) = \int_0^\theta z^2 f(z) dz = n\theta^{-n} \int_0^\theta z^2\; z^{n-1} dz = \theta^2 \frac{n}{n+2},$$

$$\mathrm{V}(\widehat{\theta}) = \mathrm{E}(\widehat{\theta}^2) - (\mathrm{E}\widehat{\theta})^2 = \theta^2 \left[\frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right] = \frac{n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Иймээс $\widehat{\theta}$ үнэлэлтийн хазайлт нь:

$$\text{bias} = \mathrm{E}(\widehat{\theta}) - \theta = \theta \frac{n}{n+1} - \theta = -\theta \frac{1}{n+1}.$$

Хүрэлцээтэй их n–ийн хувьд

$$\mathrm{V}(\theta) \approx \frac{\theta^2}{n^2}.$$

Бодлого 11.4. Олон хэмжээст нормал тархалтын $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\Omega}$ параметрүүдийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлтийг n хэмжээт түүврээр байгуул.

Бодолт. Бидэнд үл хамаарах, нэгэн ижил нормал тархалттай $k \times 1$ хэмжээст, n тооны $\boldsymbol{y}_i \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega})$ вектор өгөгдсөн. Вектор тус бүр дараах нягт бүхий тархалттай байна.

$$h(\boldsymbol{y}) = (2\pi)^{-k/2} |\boldsymbol{\Omega}|^{-1/2} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}) \right\}.$$

Энд, $\boldsymbol{\mu} - k \times 1$ вектор, $\boldsymbol{\Omega}$–эерэг торхойлогдсон, тэгш хэмт, $k \times k$ хэмжээст матриц. Иймээс үл мэдэгдэх параметрийн тоо $k + k(k+1)/2 = k(k+3)/2$ байна.

$|\boldsymbol{\Omega}^{-1}| = |\boldsymbol{\Omega}|^{-1}$ болохыг тооцон үнэний хувийн логарифм функцийг бичвэл:

$$\begin{aligned} \ln L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Omega}) &= \ln \prod_{i=1}^{n} h(y_i) \\ &= -\frac{kn}{2} \ln 2\pi + \frac{n}{2} \ln |\boldsymbol{\Omega}^{-1}| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\mu}). \end{aligned}$$

$\ln L$ функцийг $\boldsymbol{\mu}$ болон $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$–ээс хамаарсан мэтээр авч үзэх нь эвтэйхэн. Тухайн уламжлалыг олж тэгтэй тэнцүүлье (бодолтын төгсгөлд томъёолсон хоёр леммийг ашиглав).

$\boldsymbol{\mu}$–аар авсан уламжлал:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\mu}} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} 2\boldsymbol{\Omega}^{-1} (\boldsymbol{y_i} - \boldsymbol{\mu}) = 0.$$

Эндээс

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu}) = 0.$$

буюу

$$\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{y}_i = \overline{\boldsymbol{y}}.$$

Лемм 11.9.1 болон Лемм 11.9.2–ыг ашиглан $\boldsymbol{\Omega}^{-1}$–ээр авсан уламжлалыг олъё:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\Omega}^{-1}} = \frac{n}{2} \boldsymbol{\Omega} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{\mu})'.$$

Ковариацийн матрицын хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт нь

$$\widehat{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}})(\boldsymbol{y}_i - \overline{\boldsymbol{y}})'.$$

Лемм 11.9.1. *$\boldsymbol{A}$ – $k \times k$ матриц, $\boldsymbol{x}$ – $k \times 1$ вектор байг. Тэгвэл*

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}'$$

Б а т а л г а а: $\boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ –ээс a_{ij}–ээр авсан уламжлалыг бодвол

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial}{\partial a_{ij}}\sum x_x a_{ts} x_s = x_i x_j = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}')_{ij}.$$

Лемм 11.9.2. *$\boldsymbol{A}$–тэгш хэмт, үл бөхөх, $k \times k$ хэмжээст матриц, $|\boldsymbol{A}|$ түүний тодорхойлогч байг. Тэгвэл*

$$\frac{\partial \ln |\boldsymbol{A}|}{\partial \boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^{-1}.$$

Б а т а л г а а: Тодорхойлогчийг мөрөөр задалсан задаргаа

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

($|M_{ij}|$–матрицын минорууд), эндээс

$$\frac{\partial |\boldsymbol{A}|}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|.$$

гэж олдоно. $\boldsymbol{A}^{-1}$ матрицын a^{ij} элементүүдийн хувьд

$$a^{ij} = \frac{(-1)^{i+j}|M_{ji}|}{|\boldsymbol{A}|}.$$

Сүүлийн хоёр томъёоноос

$$\frac{\partial \ln |\boldsymbol{A}|}{\partial a_{ij}} = a^{ji}, \quad \text{эсвэл} \quad \frac{\partial \ln |\boldsymbol{A}|}{\partial \boldsymbol{A}} = (\boldsymbol{A}^{-1})'.$$

$\boldsymbol{A}$ матриц тэгш хэмтэйг тооцвол лемм батлагдана.

Бодлого 11.5. $L_n(\theta)$–үнэний хувийн функц байг. Тэгвэл

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln L_n(\theta)}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right) = 0, \qquad \mathrm{V}\left(\frac{\partial \ln L_n(\theta)}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right) = F_n(\boldsymbol{\theta})$$

болохыг батал.

Бодолт. Үнэний хувийн $L_n(\theta)$ функц ажиглалтуудын хамтын тархалтын нягтын функц байдгийг саная. Иймд бүх $\boldsymbol{\theta}$–ийн хувьд $\int Ldy = 1$, $\int Ldy$–ээс $\boldsymbol{\theta}$–өөр авсан тухайн уламжлалууд тэгтэй тэнцүү. Тухайн тохиолдолд:

$$\mathbf{0} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \int Ldy = \int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} Ldy = \int \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} L\right) \frac{1}{L} Ldy = \mathrm{E}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right).$$

Бодлогын эхний хэсэг батлагдав.

Хоёр дахь хэсгийг батлахын тулд эхлээд дараах гаргалгааг хийе.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}'} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}'}\right) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\left(\frac{1}{L}\right)\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}'} + \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'} \\ &= -\frac{1}{L^2}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\theta}'} + \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'} = -\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}'} + \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'}.\end{aligned}$$

Эндээс

$$\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'} = \frac{\partial 2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'} + \left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)'. \qquad (*).$$

$\int Ldy$–ээс θ–өөр авсан II эрэмбийн тухайн уламжлалууд тэгтэй тэнцүү гэдгээс

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'}\int Ldy = \int \frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'} Ldy = \int \frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'} Ldy \\ &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{L}\frac{\partial^2 L}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'}\right) \\ &\text{((*) адитгалыг ашиглавал)} \\ &= \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}\partial \boldsymbol{\theta}'}\right) + \mathrm{E}\left(\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)'\right).\end{aligned}$$

Сүүлчийн илэрхийллийн эхний нэмэгдэхүүн тодорхойлолт ёсоор $-F_n(\boldsymbol{\theta})$–тэй тэнцүү, хоёр дахь нэмэгдэхүүн нь бодлогын эхний хэсэг ёсоор

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right)\right) = \mathrm{V}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right).$$

Иймээс

$$F_n(\boldsymbol{\theta}) = \mathrm{V}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\theta}}\right).$$

Бодлого 11.6. $y_1, y_2, ..., y_n$ нь $(\theta, 2\theta)$ завсарт нэгэн ижил, жигд тархалттай, үл хамаарах санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд байг. Тэгвэл

а) Хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт $\widehat{\theta} = \max y_i/2$,

б) $\widehat{\theta}$ үнэлэлт хазайлттай боловч хязгаартаа хазайлтгүй болохыг,

в) $\mathrm{V}(\widehat{\theta})$ дисперс хязгаартаа $\theta^2/(4n^2)$–тай тэнцүү болохыг тус тус үзүүл.

Бодолт. а) Бодлогын нөхцөл ёсоор $y_1, y_2, ..., y_n$ санамсаргүй хэмжигдэхүүнүүд үл хамаарах, $[\theta, 2\theta]$ завсарт жигд тархалттай гэдгээс y санамсаргүй хэмжигдэхүүний тархалтын функц дараах хэлбэртэй байна:

$$F_y(z) = \frac{z-\theta}{\theta}, \qquad \theta \le z \le 2\theta$$

($z < \theta$ үед $F_y(z) = 0$, $z > 2\theta$ үед $F_y(z) = 1$). Үнэний хувийн функц нь:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} h(y_i, \theta) = \frac{1}{\theta^n}, \qquad 0 < y_i \le \theta,$$

бусад y_i–ийн хувьд тэгтэй тэнцүү.

θ өсөх тутам L монотон буурч байна. Энэ функцийн максимум дифференциалчлах аргаар олдохгүй. Харин боломжит утгуудын хамгийн багыг θ–өөр сонгох нь ойлгомжтой. Бүх i–ийн хувьд $y_i/2 \le \theta \le y_i$ болохоор

$$\frac{1}{2}\max y_i \le \theta \le \min y_i.$$

Эндээс, хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт

$$\widehat{\theta} = \frac{1}{2}\max y_i.$$

б) $\widehat{\theta}$–ийн дундаж болон дисперсийг олохын тулд түүний тархалтын функц $F(z)$, нягтын функц $f(z)$–ийг олъё.

$$\begin{aligned} F(z) &= P(\widehat{\theta} \le z) = P(2\widehat{\theta} \le 2z) = P(\max y_i \le 2z) = \prod_{i=1}^{n} P(y_i \le 2z) \\ &= F_y(2z)^n = \left(\frac{2z-\theta}{\theta}\right)^n = \theta^{-n}(2z-\theta)^n, \qquad \theta/2 \le z \le \theta \end{aligned}$$

(y_i үл хамаарах гэдгийг ашиглав). Тархалтын функцийг дифференциалчилж нягтын функцийг олбол

$$f(z) = F'(z) = 2n\theta^{-n}(2z-\theta)^{n-1}, \qquad \theta/2 \le z \le \theta.$$

Эндээс

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\widehat{\theta}) &= \mathrm{E}\left(\frac{1}{2}\max y_i\right) = \int_{-\infty}^{\infty} z f(z)dz = 2n\theta^{-n}\int_{\theta/2}^{\theta} z(2z-\theta)^{n-1}dz \\ &\quad (t = 2z-\theta \text{ орлуулга хийвэл}) \\ &= \frac{1}{2}n\theta^{-n}\int_{0}^{\theta}(t+\theta)t^{n-1}dt = \frac{1}{2}n\theta^{-n}\left(\int_{0}^{\theta} t^n dt + \theta\int_{0}^{\theta} t^{n-1}dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\theta\left(\frac{n}{n+1}+1\right) = \theta\frac{2n+1}{2n+2} = \theta\frac{2n+1/2}{n+1} = \theta - \theta\frac{1}{2n+2}. \end{aligned} \tag{11.70}$$

Эндээс $\widehat{\theta}$–ийн хазайлт нь:

$$\mathrm{bias}(\widehat{\theta}) = \mathrm{E}(\widehat{\theta}) - \theta = -\theta\frac{1}{2n+2}.$$

Иймд $\widehat{\theta}$ үнэлэлт хазайлттай боловч хязгаартаа хазайлтгүй үнэлэлт болно.

в) $\widehat{\theta}$–ийн дисперсийг олъё.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\widehat{\theta}^2) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} z^2 f(z)dz = 2n\theta^{-n}\int\limits_{\theta/2}^{\theta} z^2(2z-\theta)^{n-1}dz \\
&(t = 2z-\theta \text{ орлуулга хийвэл}) \\
&= \frac{1}{4}n\theta^{-n}\int\limits_0^{\theta}(t+\theta)^2 t^{n-1}dt \\
&= \frac{1}{4}n\theta^{-n}\left(\int\limits_0^{\theta} t^{n+1}dt + 2\theta\int\limits_0^{\theta} t^n dt + \theta^2\int\limits_0^{\theta} t^{n-1}dt\right) \\
&= \frac{1}{4}\theta^2\left(\frac{n}{n+2}+\frac{2n}{n+1}+1\right) = \theta^2\frac{4n^2+8n+2}{4(n+1)(n+2)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\widehat{\theta}) &= \mathrm{E}(\widehat{\theta}^2) - (\mathrm{E}\widehat{\theta})^2 = \theta^2\left(\frac{4n^2+8n+2}{4(n+1)(n+2)} - \frac{(2n+1)^2}{4(n+1)^2}\right) \\
&= \theta^2\frac{n}{4(n+1)^2(n+2)}.
\end{aligned}$$

Сүүлчийн тэнцэтгэлээс, $\mathrm{V}(\widehat{\theta})$ хязгаартаа $\theta^2/(4n^2)$–тай тэнцүү болох нь харагдаж байна.

Бодлого 11.7. $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u} \sim N(0, \sigma^2\boldsymbol{I}_n)$ шугаман загвар өгөгдөв. Тэгвэл

$$LM = n(\mathrm{ESS_R} - \mathrm{ESS_{UR}})/\mathrm{ESS_R}, \qquad LR = n\ln(\mathrm{ESS_R}/\mathrm{ESS_{UR}})$$

$$W = n(\mathrm{ESS_R} - \mathrm{ESS_{UR}})/\mathrm{ESS_{UR}}$$

болохыг үзүүл. Мөн $LM \le LR \le W$ тэнцэтгэл биш биелэхийг харуул.

Бодолт. Энэ бодлогонд Бүлэг 11–т үзүүлсэн үр дүн болон тэмдэглээг ашиглана. Зааглалгүй болон зааглалтай регрессийн $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ коэффициентуудын үнэлэлтийн тусламжтай олсон регрессийн үлдэгдлүүдийг дараах байдлаар тэмдэлэсэн:

$$\widehat{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widetilde{\boldsymbol{\beta}}.$$

Үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэр болон алдааны дисперсийн хамгийн их үнэний хувь бүхий үнэлэлт:

$$\mathrm{ESS_{UR}} = \widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}}, \quad \mathrm{ESS_R} = \widetilde{\boldsymbol{u}}'\widetilde{\boldsymbol{u}}, \quad \widehat{\sigma}^2 = \widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}}/n, \quad \widetilde{\sigma}^2 = \widetilde{\boldsymbol{u}}'\widetilde{\boldsymbol{u}}/n.$$

$\boldsymbol{\Omega} = \sigma^2\boldsymbol{I}$ тул $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$, $\widetilde{\boldsymbol{\beta}}$ нь σ^2–аас үл хамаарна:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X'y}, \qquad \widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}} - (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{R'P}^{-1}(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}).$$

Үүнд, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{R}'$, коэффициентуудын зааглал $\boldsymbol{R\beta} = \boldsymbol{r}$ хэлбэртэй.

(11.32), (11.40)–өөс

$$\ln L(\widehat{\boldsymbol{\beta}}, \widehat{\sigma}^2) = \text{constant} - (n/2)\ln \widehat{\sigma}^2,$$

$$\ln L(\widetilde{\boldsymbol{\beta}}, \widetilde{\sigma}^2) = \text{constant} - (n/2)\ln \widetilde{\sigma}^2.$$

(11.48)–аас:

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}'\widetilde{\boldsymbol{u}} - \widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}} = (\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widetilde{\boldsymbol{\beta}})'\boldsymbol{X'X}(\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widetilde{\boldsymbol{\beta}}).$$

Мөн

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \widetilde{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{R'P}^{-1}(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})$$

учраас

$$(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{R}')^{-1}(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) = \widetilde{\boldsymbol{u}}'\widetilde{\boldsymbol{u}} - \widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}}.$$

$\boldsymbol{X'}\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{R'P}^{-1}(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})$ тул $\boldsymbol{X'}\widetilde{\boldsymbol{u}}$–ийн зүүн талаас $(\boldsymbol{X'X})^{-1/2}$–ээр үржүүлж, түүний скаляр квадратыг бодвол:

$$(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r})'(\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{R}')^{-1}(\boldsymbol{R}\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{r}) = \widetilde{\boldsymbol{u}}'\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X'X})^{-1}\boldsymbol{X''}\widetilde{\boldsymbol{u}}.$$

Иймд бидний олох гурван статистикийн томъёо (11.52)–(12.54) тодорхойлолтоос мөрдөн гарна.

$x = \widetilde{\sigma}^2/\widehat{\sigma}^2$ гэвэл:

$$W = n\frac{\widetilde{\boldsymbol{u}}'\widetilde{\boldsymbol{u}} - \widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}}}{\widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}}} = n(x-1),$$
$$LM = n\frac{\widetilde{\boldsymbol{u}}'\widetilde{\boldsymbol{u}} - \widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}}}{\widetilde{\boldsymbol{u}}'\widetilde{\boldsymbol{u}}} = n\left(1 - \frac{1}{x}\right),$$
$$LR = n\ln\frac{\widetilde{\boldsymbol{u}}'\widetilde{\boldsymbol{u}}}{\widehat{\boldsymbol{u}}'\widehat{\boldsymbol{u}}} = n\ln x.$$

Эдгээр тэмдэглээний хувьд $LM \leq LR \leq W$ тэнцэтгэл биш дараах хэлбэртэй болно:

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1.$$

Энэ нөхцөл $x > 0$ байх бүх x–ийн хувьд биелэх нь илэрхий.

Бүлэг 12

Хугацааны цуваа

Эдийн засгийн ихэнх бодлого лагтай (хугацааны өмнөх агшин дахь утга нь нөлөөлдөг) хувьсагчдыг агуулсан байдаг. Жишээлбэл t–р жилд үйлдвэрлэсэн бүтээгдэхүүний хэмжээ тухайн жилийн хөрөнгө оруулалт болон өмнөх жилүүдийн хөрөнгө оруулалтаас хамаардаг байна:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 I_t + \beta_1 I_{t-1} + ... + \beta_k I_{t-k}.$$

Эндоген хувьсагч нь хугацааны хоцролтоороо экзоген хувьсагчийн өөрчлөлтөнд нөлөөлдөг загварууд байнга тааралддаг. Ийм тохиолдолд, загварт экзоген юмуу эсвэл эндоген хувьсагчийн лагтай утгууд, эсвэл эдгээрийг нэгэн зэрэг ашиглаж болно. Статистик загварчлалд 2 тохиолдлыг ялгаж үзэх нь тустай байдаг. Тухайлбал

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{12.1}$$

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{12.2}$$

гэсэн 2 загвар хоёулаа лагтай хувьсагчдыг агуулсан байгаа ч параметрүүдийн статистик үнэлэлтийн үүднээс хоорондоо эрс ялгаатай. Үнэхээр (12.1) загварт регрессорууд алдаатай корреляцгүй (энд экзоген хувьсагчид x_t–г санамсаргүй биш гэж үзнэ). Иймд (12.1) регрессийг хамгийн бага квадратын аргаар үнэлж болно. Харин (12.2) загварт y_{t-1} нь өөртөө ε_{t-1}–ийг агуулах учир алдааны вектор ε нь регрессоруудын матриц $\boldsymbol{X}$–тэй корреляцтай байна. Энэ тохиолдолд ХБК-үнэлэлт ерөнхийдөө хазайлттай гарна.

(12.1) тэгшитгэл нь лаг тархсан (*distributed lags*) DL(1) загварын жишээ юм. Хаалтанд байгаа тоо загварын хамгийн их лагийг илэрхийлнэ. (12.2) тэгишитгэл лаг тархсан, авторегрессийн ADL$(1, 0)$ загвар юм. Хаалтанд буй тоо нь эндоген болон экзоген хувьсагчдын хамгийн их лагуудыг илэрхийлнэ.

Экзоген хувьсагч x–ийн нэгж өөрчлөлтөнд харгалзах y хувьсагчийн утгыг авч үзье. Хоёр загварын хувьд энэ утга нэг мөчлөгт (*short run*) хоёулаа β_2–той тэнцүү. Харин (12.1) загварт нийлбэр нөлөө нь (*long run*) $\beta_2 + \beta_3$, (12.2) загварт $\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_2\beta_3^2 + ...$ хэмжээтэй байна. Үнэн хэрэг дээрээ, хэрэв y_{t-1} нь β_2 нэгжээр өөрчлөгдвөл y_t нь $\beta_2\beta_3$ нэгжээр өөрчлөгдөнө гэх мэт үргэлжлэх юм. Хэрэв $|\beta_3| < 1$ нөхцөл биелэх бол дээрх цуваа $\beta_2/(1 - \beta_3)$–руу нийлнэ. Иймд $|\beta_3| < 1$ нөхцөл нь тогтвортой байх нөхцөл болох бөгөөд авторегрессийн гишүүдтэй бүх загваруудад ямар нэг хэлбэрээр тааралдана.

Шилжүүлэх оператор. Хугацааны лагтай хувьсагчдыг агуулсан загваруудад аналитик бодолт хийхэд $Lx_t = x_{t-1}$ хэлбэрийн шилжүүлэх оператор (*lag operator*) ашиглах нь тохиромжтой байдаг. Жишээ нь (12.1) ба (12.2) загварын өргөтгөл болох дараах ADL(p, q) загварыг

$$y_t - \alpha_1 y_{t-1} - ... - \alpha_p y_{t-p} = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + ... + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t; \quad t = 1, ..., n, \tag{12.3}$$

шилжүүлэх операторын тусламжтай бичвэл:

$$A(L)y_t = \delta + B(L)x_t + \varepsilon_t; \quad t = 1, ..., n. \tag{12.4}$$

Үүнд, $A(L), B(L)$ нь шилжүүлэх оператороос хамаарсан олон гишүүнт:

$$A(L) = 1 - \alpha_1 L - ... - \alpha_p L^p,$$

$$B(L) = \beta_0 + \beta_1 L + ... + \beta_q L^q.$$

12.1 Лаг тархсан загварууд

(12.4) тэгшитгэлийг авторегрессийн гишүүнгүй бичвэл дараах хэлбэртэй болох ба

$$y_t = \delta + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + ... + \beta_q x_{t-q} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n \tag{12.5}$$

ийм загварыг лаг тархсан загвар гэж нэрлэнэ. Өмнө дурьдсанчлан, үл хамаарах хувьсагчдын нэгж өөрчлөлтөнд харгалзах нийлбэр нөлөө $\beta = \beta_0 + \beta_1 ... + \beta_q$–тэй тэнцүү. Тухайлсан s лагийн нөлөө нь $w_s = \beta_s/\beta$, $\sum\limits_{s=0}^{q} w_s = 1$ байна. Бүхэл аргументтай функц w_s–ийг лагийн тархалт гэнэ. x–ийн өөрчлөлтөнд үзүүлэх y–ийн хариу үйлдлийн хурдыг хэмжихийн тулд $\sum\limits_{s=0}^{q} s w_s$–тэй тэнцүү дундаж лаг гэсэн ойлголт оруулж болно. Дундаж лагийн бага утга нь x–ийн өөрчлөлтөнд үзүүлэх y–ийн хурдан реакцад харгалзах ба их утга нь y–ийн удаавтар реакцад харгалзана.

12.1.1 Үнэлэх

x санамсаргүй биш, ε_t алдаанууд хамааралгүй бөгөөд тэг дундаж, σ^2 дисперс бүхий ижил тархалттай: $\varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2)$ (*independent identically distributed*) бол (12.5) загвар сонгодог шугаман регрессийн нөхцлүүдийг хангах боловч практикт түүнийг үнэлэхэд хүндрэл учирдаг. Учир нь, нэгдүгээрт: бодлогын агуулга ёсоор, хугацааны ихээхэн хоцролтын нөлөөгөөр коэффициентуудын тоо $q + 2$ нь хэт их байж болох юм; хоёрдугаарт: x_t цувааны зарим бүтцийн хувьд тухайлбал автокорреляцтай эсвэл улирлын нөлөөтэй үед $\boldsymbol{X'X}$ матриц бараг бөхөхөд хүргэх тул мультиколлинеар шинжтэй тохиолдол болох юм.

Эдгээр хүндрэлээс ангижрахын тулд лагийн тархалт w_s–ийн хэлбэрийг "гөлгөр" гэе. Энэ тохиолдолд үнэлэх параметрийн тоо цөөрнө. Ийм төрлийн нилээд өргөн дэлгэрсэн загвар болох *олон гишүүнт лагтай* (Алмоны (Almon) арга) болон, *геометр лаг* (Койкийн (Koyck) загвар) бүхий 2 загварыг авч үзье.

12.1.2 Олон гишүүнт лагтай загвар

Энэ загварт β_i–ийн i–ээс хамаарах хамаарал r зэргийн олон гишүүнт дөхөлтөөр илэрхийлэгдэнэ.

$$\beta_i = \gamma_0 + \gamma_1 i + ... + \gamma_r i^r, \quad r \leq q. \tag{12.6}$$

(12.5)–д (12.6) орлуулга хийсний дараа зөвхөн $(r+2)$ үл мэдэгдэх параметрийг агуулсан дараах хэлбэрийн загвар үүснэ.

$$y_t = \delta + \gamma_0 \widetilde{x}_{0t} + ... + \gamma_r \widetilde{x}_{rt} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n. \tag{12.7}$$

Үүнд, $\widetilde{x}_0, ..., \widetilde{x}_r$ хувьсагчид нь $x_t, ..., x_{t-q}$ хувьсагчдын шугаман эвлүүлэг.

(12.6) олон гишүүнтийн эрэмбэ r–ийг хэрхэн тодорхойлох вэ?. (12.7) загварын илэрхийлэх чадварыг (адекватность) шалгахын тулд дараах F тестийг ашиглана:

$$F = \frac{(\mathrm{ESS_R} - \mathrm{ESS_{UR}})/(q-r)}{\mathrm{ESS_{UR}}/(n-q-2)}$$

(энд, (12.5) –зааглалгүй регресс, (12.7) –зааглалтай регресс). Энэ тохиолдолд F–ийн утга хангалттай бага бол (F-статистикийн критик утгаас бага) олон гишүүнт лагтай загвар адекват (илэрхийлэх чадвартай) байна.

12.1.3 Геометр лагтай загвар

Энэ загварт, q хугацааны дараа x хувьсагчийн нөлөө арилахгүй, хугацааны алхам бүрд нэгэн ижил хувиар төгсгөлгүй буурна гэж үзнэ. Ийм загварын жишээг энэ бүлгийн эхэнд авч үзсэн билээ. Загвар дараах хэлбэртэй байна.

$$y_t = \delta + \beta x_t + \beta\lambda x_{t-1} + \beta\lambda^2 x_{t-2} + ... + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n. \tag{12.8}$$

λ, $(0 < \lambda < 1)$ параметр нь реакцийн хурдны урвуу хамааралтай холбоотой бөгөөд $\lambda = 0$ нь x–ийн өөрчлөлтөнд үзүүлэх y–ийн агшин зуурын гүйцэд реакцийг илэрхийлнэ. Урт хугацааны нийлбэр нөлөө нь $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \beta\lambda^k = \beta/(1-\lambda)$ болно. Лагийн тархалт нь $w_s = (1-\lambda)\lambda^s$ хэлбэртэй байна.

(12.8) загвар δ, β, λ гэсэн зөвхөн гурван параметр агуулах боловч шугаман биш загвар учраас түүнийг үнэлэхэд нилээд хүндрэлтэй. Иймд уг загварын параметрүүдийг үнэлэхдээ Хилдред-Лу–гийнхтай төстэй эвристик процедурыг ашиглаж болно. Ийм процедурын үндсэн санаа нь $(0, 1)$ интервалаас λ–ийн утгыг ямар нэг алхамтайгаар сонгон авч алхам бүрийн хувьд (12.8) тэгшитгэлийн ХБК-үнэлэлтийг олно. Дараа нь регрессийн үлдэгдлүүдийн квадратын нийлбэр хамгийн бага байх λ–г сонгон авна.

Үнэлэлтийн өөр нэг арга нь: (12.8) тэгшитгэлээс, хугацааны хувьд нэг алхам ухраасан (12.8) тэгшитгэлийг λ–аар үржүүлж хасна:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \delta(1-\lambda) + \beta x_t + u_t, \quad t = 1, ..., n$$

буюу

$$y_t = \delta(1-\lambda) + \lambda y_{t-1} + \beta x_t + u_t, \quad t = 1, ..., n. \tag{12.9}$$

Үүнд, $u_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$. (12.9) тэгшитгэл хугацааны хоцролттой (лагтай) эндоген хувьсагчийг агуулах боловч алдаа нь согодог шугаман регрессийн нөхцөлийг үл хангана. Ийм учраас тэгшитгэлийн коэффициентуудын ХБК-үнэлэлтүүд зохимжтой биш. Зохимжтой үнэлэлт гарган авахын тулд тухайлбал, y_{t-1}–ийн хувьд x_{t-1}–ийг хэрэгсэл хувьсагч болгон авч хэрэгсэл хувьсагчийн аргыг юмуу эсвэл хамгийн их үнэний хувь бүхий аргыг ашиглаж болно.

12.2 Динамик загварууд

Хугацааны хоцролттой эндоген хувьсагчдыг баруун талдаа агуулсан динамик загварын онцлогийг хялбар жишээн дээр авч үзье:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n.$$

(12.4) тэгшитгэлийн тэмдэглэгээг ашиглан бичвэл

$$A(L)y_t = \beta_1 + B(L)x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n, \tag{12.10}$$

Үүнд, $A(L) = 1 - \beta_3 L$, $B(L) = \beta_2$. Хялбар тохиолдлоос эхэлъе. $B(L) \equiv \beta_2 \equiv 0$ (β_3-ын индексийг орхъё):

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), \quad t = 1, ..., n \tag{12.11}$$

Ийм процессыг I эрэмбийн авторегрессийн процесс гэж нэрлээд AR(1) гэж тэмдэглэнэ. Бүлэг 6–т регрессийн алдааны хувьд үүнтэй төстэй загвар авч үзсэн билээ. Урьдын адил $|\beta| < 1$ гэж үзвэл

$$y_t = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \varepsilon_{t-s}, \quad \mathrm{E}(y_t) = 0; \quad \mathrm{V}(y_t) = \sigma^2/(1 - \beta^2). \tag{12.12}$$

β параметрийн ХБК-үнэлэлт нь:

$$\widehat{\beta} = \sum y_t y_{t-1} / \sum y_{s-1}^2 = \beta + \sum \left(y_{t-1} / \sum y_{s-1}^2 \right) \varepsilon_t. \tag{12.13}$$

Бүх $t < n$ хувьд ε_t ба $\sum y_t y_{t-1} / \sum y_{s-1}^2$ нь хамааралтай учраас (12.13) үнэлэлт ерөнхий тохиолдолд хазайлттай байна. Гэвч, хэрэв $|\beta| < 1$ бөгөөд ε_t алдааны тархалтын шаардлагатай моментууд оршин байвал (12.13) үнэлэлт зохимжтой ба хязгаартаа хэвийн тархалттай болохыг харуулж болно:

$$\sqrt{n}(\widehat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, 1 - \beta^2) \tag{12.14}$$

Иймээс авторегрессийн гишүүн бүхий тэгшитгэлийг ХБК аргаар үнэлж болох нь харагдаж байна. Энд 2 нөхцөл чухал шаардлагатай.

1) Тогтворжилт. (12.11) тэгшитгэлийн хувьд энэ нь $|\beta| < 1$ нөхцөл бөгөөд параметрийн утгууд критик мужийн хилээс ямар нэг зайд оршин байвал илүү сайн гэдгийг илэрхийлнэ.

2) ε_t алдаанууд автокорреляцгүй байх явдал.

12.2.1 Алдаанууд нь автокорреляцтай байх авторегрессийн загвар

(12.11) загварт автокорреляцийн алдааг нэмж тооцвол:

$$\begin{aligned} y_t &= \beta y_{t-1} + u_t, \quad t = 1, ..., n, \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \end{aligned} \tag{12.15}$$

Энэ тохиолдолд өөр нөхцөл байдал үүснэ. Учир нь, y_{t-1} ба u_t нь хоёулаа u_{t-1}–ээс хамаарах тул хоорондоо корреляц хамааралтай. Тогтвортой байх $|\beta| < 1$, $|\rho| < 1$ нөхцөл биелэх үед β параметрийн ХБК-үнэлэлт (12.13)–ын магадлалаараа нийлэх хязгаарыг олж болно:

$$p \lim \widehat{\beta} = \frac{\beta - \rho}{1 + \beta\rho} \neq \beta. \tag{12.16}$$

Ийнхүү алдаа нь автокорреляцтай бөгөөд авторегрессийн гишүүн агуулсан загварт регрессийн коэффициентуудын ХБК-үнэлэлт зохимжтой биш гарч байна. Бүр цаашилбал, ХБК аргын үлдэгдлүүдээс гарган авсан $\widehat{\rho}$ үнэлэлтийг зохимжтой биш гэж харуулж болно.

$$p \lim \widehat{\rho} = \frac{\beta\rho(\beta + \rho)}{1 + \beta\rho} \neq \rho. \tag{12.17}$$

(12.15) загварын хувьд зохимжтой үнэлэлт байгуулах арга байхгүй гэдгийг тэмдэглэе. Үнэн хэрэг дээрээ, тэгшитгэлийг хугацааны нэг хоцролттойгоор бичиж ρ–оор үржүүлэн анхны тэгшитгэлээс хасвал дараах тэгшитгэл үүснэ.

$$y_t = (\beta + \rho) y_{t-1} - \beta\rho y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n. \tag{12.18}$$

Өөрөөр хэлбэл β, ρ параметрүүд үл ялгагдана. ($(\beta, \rho) = (0.1, 0.2)$ эсвэл $(\beta, \rho) = (0.2, 0.1)$ үед нэг ижил (12.15) тэгшитгэл үүснэ) Иймд тэгшитгэл үл адилсах байна.

Хэрэгсэл хувьсагчийн аргаар үнэлэх. Бүлэг 9–т, регрессорууд нь алдаатайгаа корреляцтай үед хэрэгсэл хувьсагч ашиглаж байсны адилаар, алдаа нь автокорреляцтай бөгөөд авторегрессын гишүүн агуулсан загварыг үнэлэхэд энэ аргыг хэрэглэж болно. Тухайлбал, дараах загварыг авъя.

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + u_t, \qquad t = 1, ..., n, \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2). \end{aligned} \tag{12.19}$$

Үүнд, x-экзоген хувьсагч, y_{t-1} нь x_{t-1}–тэй корреляц хамааралтай. Иймучраас x_t–г y_{t-1}–ийн хувьд хэрэгсэл хувьсагчаар сонгон авч болно. Хэрэгсэл хувьсагчийн аргаар олсон үнэлэлт зохимжтой байна. Харин алдаанууд автокорреляцтай учир коэффициентуудын үнэлэлтийн дисперсийн үнэлэлт зохимжтой биш юм.

Хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар үнэлэх. Хялбар хувиргалт хийх замаар (12.19) загварыг дараах хэлбэрт бичье.

$$y_t = \beta_1(1 - \rho) + \beta_2 x_t - \beta_2 \rho x_{t-1} + (\beta_3 + \rho) y_{t-1} - \beta_3 \rho y_{t-2} + \varepsilon_t. \tag{12.20}$$

Алдаанууд корреляц хамааралгүй учраас (12.20) тэгшитгэлийн коэффициентуудыг хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар үнэлж болно.

Санамж 12.2.1. Өгөгдсөн тохиолдолд хамгийн бага квадратын шугаман бус арга нь дараах функцийг $\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3, \rho$ параметрүүдээр нь минимальчлахад хүргэдэг

$$\sum[y_t - \beta_1(1-\rho) - \beta_2 x_t + \beta_2\rho x_{t-1} - (\beta_3+\rho)y_{t-1} + \beta_3\rho y_{y-2}]^2 \tag{12.21}$$

Хамгийн бага квадратын шугаман бус арга нь хамгийн их үнэний хувь бүхий аргын дөхөлт бөгөөд y–ийн анхны утгаар оновчлол хийдэггүйгээрээ ялгаатай юм.

Иймд, авторегрссийн гишүүн бүхий загварыг үнэлэхийн өмнө алдаанууд нь автокорреляцтай эсэхийг шалгах шаардлагатай нь харагдаж байна.

Алдаанууд автокорреляцтай эсэхийг шалгах. Юуны өмнө, § 6.2–т авч үзсэн Дарбин-Уотсоны (DW) тестийг энэ тохиолдолд хэрэглэж болохгүйг тэмдэглэе. Лаг бүхий эндоген хувьсагчид агуулсан тохиолдолд DW тестийн үр дүн "алдаа автокорреляцгүй" гэсэн таамаглалын талд гардаг. Харин энэ тохиолдолд Лагранжийн үржигдэхүүний (LM) тестийг хэрэглэж болно. Түүнчлэн компьютерийн олон төрлийн программуудад хэрэгжсэн Дарбины h–тестийг ашиглаж болно. Энэ тестийг зөвхөн I эрэмбийн корреляцтай тохиолдолд хэрэглэж болдгоороо LM тестээс ялгаатай. (12.19) тэгшитгэлийн хувьд h статистикийн утга дараах хэлбэртэй байна.

$$h = \left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{DW}\right)\sqrt{\frac{n}{1 - n\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\beta}_3)}}, \tag{12.22}$$

Үүнд, DW– Дарбин-Уотсоны статистикийн утга, $\widehat{\beta}_3$ анхны (12.19) тэгшитгэлд ХБКА хэрэглэн гарган авсан, y_{t-1}–ийн өмнөх коэффициентийн үнэлэлт. Хэрэв "алдаа I эрэмбийн автокорреляцгүй" гэсэн $\mathbf{H}_0$ таамаглал үнэн бол h статистик хязгаартаа стандарт нормал тархалттай байна. Хэрэв $h > 1.645$ бол $\mathbf{H}_0$ таамаглал 5 %–ийн итгэх түвшинд няцаагдаж " алдаа эерэг автокорреляцтай " гэсэн таамаглал зөвшөөрөгдөнө.

$n\widehat{\mathrm{V}}(\widehat{\beta}_3) > 1$ үед Дарбин-Уотсоны тест ажиллахгүй. Дараах процедур, хязгаартаа h-тесттэй эквивалент болохыг Дарбин үзүүлсэн: 1) (12.19) тэгшитгэлийг хамгийн бага квадратын аргаар үнэлж e_t үлдэгдлийг олно. 2) $e_{t-1},\ y_{t-1},\ x_t$ регрессоруудын тусламжтай туслах регресс зохиож e_t–г үнэлнэ. 3) Туслах регрессийн "e_{t-1}–ийн өмнөх коэффифиент нөлөөтэй " байх тухай $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг ердийн t тестийн туслажтай шалгана.

12.2.2 Хугацааны хоцролттой (лагтай) хувьсагчдыг агуулсан зарим жишээ

Энэ хэсэгт дараах ADL(1,1) загварын тухайн тохиолдлуудыг авч үзнэ.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 x_{t-1} + \beta_4 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n. \tag{12.23}$$

Тухайлан зохицох загвар. Тухайлан зохицох (*partial adjustment*) загварт y хувьсагчийн (оновчтой, эсвэл зорилгын) хүсэж буй утгыг дараах тэгшитгэлээр тодорхойлогдоно гэж үздэг:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), \quad t = 1, ..., n. \tag{12.24}$$

y хувьсагчийн ажиглагдаж байгаа утга хүсч буй утганд агшин зуурт хүрэлгүй харин хүссэн чиглэлд δ хувиар өөрчлөгдөнө:

$$(y_t - y_{t-1}) = \delta(y_t^* - y_{t-1}) \tag{12.25}$$

Жишээлбэл, (12.24) нь борлуулалтын түвшин x_t–ээс хамаарах нөөцийн оновчтой хэмжээ y_t^*–г тодорхойлдог байг. (12.25) тэгшитгэлийг дараах хэлбэрт бичиж болно.

$$y_t = \delta y_t^* + (1+\delta)y_{t-1}.$$

өөрөөр хэлбэл нөөцийн хэмжээ нь нөөцийн оновчтой хэмжээ ба өмнөх үеийн нөөцийн хэмжээний жигнэсэн дундажтай тэнцүү. (12.25) тэгшитгэлийг (12.24) тэгшитгэлд орлуулбал

$$y_t = \delta\alpha + \delta\beta x_t + (1-\delta)y_{t-1} + \delta\varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n. \tag{12.26}$$

Алдаанууд корреляц хамааралгүй тул (12.26) тэгшитгэлийн $\delta\alpha$, $\delta\beta$ болон $1-\delta$ параметрүүдийн зохимжтой үнэлэлтийг ХБК аргаар гарган авч болно. (12.26) загвар нь (12.23) загварт $\beta_3 = 0$ гэсэн зааглал нэмэх замаар гарна.

Тохирох хүлээлтийн загвар. x_t хувьсагчийн хүлээгдэж буй ирээдүйн утгыг (t агшин дахь) x_{t+1}^* гэж тэмдэглэе. y_t хэмжигдэхүүн энэ хүлээгдэж буй утгаар тодорхойлогддог гэе.

$$y_t = \alpha + \beta x_{t+1}^* + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n. \tag{12.27}$$

Тохирох хүлээлтийн (*adaptive expectation*) таамаглалд, хүлээгдэж буй утгууд нь ажиглагдсан утга ба x хувьсагчийн өмнөх алхам дахь прогнозын утгын ялгавараас тодорхой пропорцоор нэмэгдэж тооцогддог гэж үздэг.

$$x_{t+1}^* = x_t^* + (1-\lambda)(x_t - x_t^*), \quad 0 \le \lambda \le 1 \tag{12.28}$$

Ийм төрлийн загвар тухайлбал, дараах тохиолдолд үүснэ. Пүүс, хугацааны дараагийн алхамд зарагдах бүтээгдэхүүний үнэ x_{t+1}–ийг мэдснээр t алхамд үйлдвэрлэх бүтээгдэхүүний хэмжээ y_t–ийн тухай шийдвэр гаргах гэж байгаа гэе. Харин t мөч дахь x_{t+1} үнэ мэдэгдэхгүй тул хүлээгдэж буй утга x_{t+1}^* дээр тулгуурлан шийдвэр гаргана. Тохирох хүлээлтийн таамаглал (12.28)–ыг дараах хэрбэртэй бичиж болно.

$$x_{t+1}^* = \lambda x_t^* + (1-\lambda)x_t,$$

өөрөөр хэлбэл хүлээгдэж буй үнэ x_{t+1}^* нь өмнөх мөчид хүлээгдэж байсан үнэ x_t^* ба ажиглагдсан үнэ x_t–ийн жигнэсэн дундаж болж байна.

(12.28) томъёогоор итерац хийж үр дүнг (12.27)–д орлуулбал

$$y_t = \alpha + \beta(1-\alpha)(x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + ...) + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n. \tag{12.29}$$

Энэ тэгшитгэл геометр лагтай загвар болох (12.8)–тай давхцана. Хэрэв (12.23)–д $\beta_3 = 0$ тавьж, алдааны автокорреляц оруулбал энэ тэгшитгэлийг (12.9) хэлбэрт шилжүүлж болно.

Алдаа засах загвар. (12.23) загвар (y^*, x^*) гэсэн стационар төлөвтэй гэе (мэдээж тогтвортой байх $|\beta_3| < 1$ нөхцөл биелэх ёстой). (12.23)–ыг стационар төлөвт бичвэл

$$(1-\beta_4)y^* = \beta_1 + (\beta_2+\beta_3)x^*$$

эсвэл

$$y^* = \frac{\beta_1}{1-\beta_4} + \frac{\beta_2+\beta_3}{1-\beta_4}x^*. \qquad (12.30)$$

(12.23) тэгшитгэлд $y_t = y_{t-1} + \triangle y_t$, $x_t = x_{t-1} + \triangle x_t$ томъёогоор хувьсагчийг сольё.

$$\triangle y_t = \beta_2 \triangle x_t - (1-\beta_4)\left(y_{t-1} - \frac{\beta_1}{1-\beta_4} - \frac{\beta_2+\beta_3}{1-\beta_4}\right) + \varepsilon_t. \qquad (12.31)$$

(12.31) тэгшитгэлийг алдаа засах загвар (*error correction*) гэнэ . Тухайн алхам дахь y–ийн өөрчлөлт хоёр хэсгээс бүрдэж байна. Эхнийх нь тухайн мөч дахь x–ийн өөрчлөлттэй пропорционал, хоёр дахь нь өмнөх алхам дахь тэнцвэрийн байдлаасаа хазайх y–ийн хазайлтын тухайлсан засвар юм.

(12.31) тэгшитгэлийн коэффициентуудыг ХБК аргаар үнэлж болно. Үнэлэлтийн үр дүн (12.23) тэгшитгэл дахь эдгээр параметрүүдийн үнэлэлттэй бүрэн нийцнэ. Учир нь тэгшитгэлүүд нэг нь нөгөөгөөсөө үл бөхөх шугаман хувиргалтаар гарна.

12.2.3 Шалтгаан-үр дагаварын хамаарлын Гранжерийн тест

Эдийн засагт хувьсагч хоорондын шалтгаан-үр дагаварын холбооны тухай асуудал байнга тавигддаг. Тухайлбал, мөнгөний масс нэмэгдэх нь инфляцийг нэмэгдүүлэх үү? гэх мэт.

Гранжерийн (Granger, 1969) дэвшүүлсэн тестийн санаа маш энгийн: "хэрэв x нь y–т нөлөөлдөг бол x–ийн өөрчлөлт y–ийн өөрчлөлтөөс түрүүлж явагдана, харин урвуу нь биелэхгүй". Өөрөөр хэлбэл, дараах 2 нөхцөл биелэнэ. Нэгдүгээрт: y–ийн прогнозод x хувь нэмэр оруулах ёстой, хоёрдугаарт: x–ийн прогнозод y нь мэдэгдэхүйц хувь нэмэр оруулах ёсгүй. Хэрэв энэ 2 хувьсагч тус бүр өөр хувьсагчийн прогнозод мэдэгдэхүйц хувь нэмэр оруулж байвал энэ хоёрт нөлөөлөх гуравдагч хувьсагч z оршин байна.

"x нь y–т үл нөлөөлнө" гэсэн тэг таамаглалыг шалгахын тулд y хувьсагчийг x ба y–ийн хугацааны хоцролттой (лагтай) хувьсагчуудаас хамааруулан регресс зохиож үнэлнэ:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{t-j} + \varepsilon_t \qquad (12.32)$$

"x нь y–т үл нөлөөлнө" гэсэн таамаглал энэ загварын хэл дээр $\mathbf{H}_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_m = 0$ хэлбэртэй болно. Энэ таамаглалыг шалгахдаа ердийн F-тест ашиглана (Бүлэг 3).

"y нь x–д үл нөлөөлнө" гэсэн таамаглал (12.32) тэгшитгэлд x, y–ийн үүргийг солих замаар дээрхийн адил шалгагдана.

"x нь y–д нөлөөлнө" гэсэн дүгнэлтэнд хүрэхийн тулд "x нь y–д үл нөлөөлнө" гэсэн таамаглал няцаагдсан, харин "y нь x–д үл нөлөөлнө" гэсэн таамаглал хүлээн зөвшөөрөгдсөн байх ёстой.

"x нь y–д нөлөөлнө" гэдэг нь x ба y хувьсагчдын хооронд шалтгаан-үр дагаварын холбоо байгааг илэрхийлэхгүй, харин өмнө нь ашиглагдсан x–ийн утга дараа нь илэрсэн y–ийн утгыг тайлбарлана гэдгийг илэрхийлнэ. Өөрөөр хэлбэл, шалтгаан-үр дагаварын холбоо байх боломжийг илэрхийлнэ. Хэрэв "x нь y–д үл нөлөөлнө" таамаглал няцаагдвал x нь y–ийн шалтгаан болохгүй гэдгийг илэрхийлнэ.

Дээр томъёолсон тестийг шалтгаан-үр дагаварын хамаарлын тухай Гранжерийн тест (*Granger causality test*) гэнэ. Ерөнхий тохиолдолд m–ийг хэрхэн сонгон авах нь тестийн үр дүнд нөлөөлнө. m–ийн янз бүрийн утганд хэд хэдэн удаа тестийг хийж үзсэнээр тестийн үр дүн m–ийн сонголтоос хир зэрэг мэдрэмтгий болох нь тайлбарлагдана. (12.32) загварт хэрэв, алдаа автокорреляцтай гэж үзэх үндэслэл байвал $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг шалгахдаа Лагранжийн үржигдэхүүний тестийг ашиглахыг зөвлөж байна.

12.3 Нэгж язгуурууд ба коинтеграц

Бид одоог хүртэл хугацааны цувааны тогтвортой байх тухай авч үзсэн билээ. Харин одоо стационар чанарын тухай ойлголттой нилээн гүнзгий танилцья.

Стационар чанар. m удаагын ажиглалтын утгууд $y_{t_1}, y_{t_2}, ..., y_{t_m}$–ийн хамтын тархалт хугацааны шилжилтээс үл хамаарч байвал (өөрөөр хэлбэл, $m, t, t_1, ..., t_m$–ийн хувьд хамтын тархалт нь $y_{t_1+t}, y_{t_2+t}, ..., y_{t_m+t}$–тархалттай давхцаж байвал) y_t цувааг эрс стационар (*strictly stationary*) буюу эсвэл явцуу утгаар стационар гэж нэрлэнэ. Бидэнд тархалт бүхэлдээ биш ковариац болон дундаж утгууд нь сонирхолтой. Ийм учраас y_t–ийн дундаж утга, дисперс, ковариац нь хугацаанаас үл хамаарах тохиолдол болох сул стационар (*weak stationarity*) буюу өргөн утгаар стационар гэсэн ойлголтыг байнга ашигладаг:

$$\mathrm{E}(y_t) = \mu < \infty, \quad \mathrm{V}(y_t) = \gamma_0, \quad \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k. \tag{12.33}$$

Тархалтын I ба II эрэмбийн моментууд нь төгсгөлөг тохиолдолд эрс стационар нөхцлөөс сул стационар нөхцөл мөрдөн гарна. Бид цаашид стационар гэдгийн дор сул стационар байх нөхцлийг ойлгоно.

Юуны өмнө автокорреляцийн функц ACF гэсэн ойлголт оруулъя

$$\rho_k = \frac{\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k})}{\mathrm{V}(y_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}. \tag{12.34}$$

Үүнд, $\rho_0 = 1$, $|\rho_k| \leq 1$ гэж үзнэ. ACF нь хугацааны цувааны загварын адилсах бодлогонд чухал үүрэг гүйцэтгэнэ.

Хугацааны цувааны хамгийн хялбар шижээ болгож үл хамаарах, ижил тархалттай ажиглалтын цуваа авч үзье

$$y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), \quad t = 1, ..., n. \tag{12.35}$$

Энэ процессыг цагаан шуугиан (*white noise*) гэж нэрлэх бөгөөд түүний хувьд $\mu = 0,\ \gamma_0 = \sigma^2,\ \gamma_k = 0,\ k > 0$ байна.

Өөр нэг жишээ нь AR(1) процесс юм:

$$y_t = m + \phi y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), \quad t = 1, ..., n. \tag{12.36}$$

Энд $|\phi| < 1$ гэж үзнэ. Энэ процессийг Бүлэг 6–д авч үзсэн билээ. (12.36) тэгшитгэлийг шилжүүлэх оператор ашиглан бичвэл:

$$(1-\phi L)y_t = m + \varepsilon_t, \tag{12.37}$$

эсвэл

$$\begin{aligned} y_t &= (1-\phi L)^{-1}(m+\varepsilon_t) = (1+\phi L+\phi^2L^2+...)(m+\varepsilon_t) = \\ &= (1+\phi+\phi^2+\cdots)m+\varepsilon_t+\phi\varepsilon_{t-1}+\phi^2\varepsilon_{t-2}+\cdots . \end{aligned} \tag{12.38}$$

$|\phi| < 1$ гэж үзэж буй учраас (12.38)–аас

$$\mathrm{E}(y_t) = \frac{m}{1-\phi} = \mu. \tag{12.39}$$

Өөрөөр хэлбэл y_t–ийн дундаж, хугацаанаас үл хамаарна. ϕ–ийн мөн тийм нөхцлийн үед

$$\mathrm{V}(y_t) = \gamma = \sigma_y^2 = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}. \tag{12.40}$$

Үүний адилаар

$$\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \gamma_k = \phi^k\sigma_y^2 = \frac{\phi^k\sigma^2}{1-\phi^2}. \tag{12.41}$$

Иймээс AR(1) процесс нь $|\phi| < 1$ нөхцөлд стационар байх ба түүний автокорреляцийн функц дараах хэлбэртэй байна.

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{12.42}$$

Өөр нэг чухал жишээ нь:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), \quad t = 1, ..., n. \tag{12.43}$$

процесс бөгөөд санамсаргүй шилжилт (*random walk*) гэж нэрлэнэ. Энэ процесс $\phi = 1$ үеийн (12.36) тэгшитгэлээр илэрхийлэгдэх AR(1) процесстой төсөөтэй боловч стационар процесс AR(1)–ээс өөрийн шинж чанараар эрс ялгардаг. ε_t ба y_{t-1} корреляц хамааралгүй гэдгийг тооцон бичвэл (12.43) ёсоор:

$$\mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(y_{t-1}) + 0; \quad \mathrm{V}(y_t) = \mathrm{V}(y_{t-1}) + \sigma^2. \tag{12.44}$$

$\mathrm{V}(y_t) \neq \mathrm{V}(y_{t-1})$ учраас санамсаргүй шилжилт нь стационар биш процесс болох нь тодорно.

Хэрэв процесс $t = 1$ моментоос эхэлдэг ба $\mathrm{E}(y_1) = \mu$, $\mathrm{V}(y_1) = \sigma^2$, гэвэл $t = 1, 2, \ldots$ үед $\mathrm{E}(y_t) = \mu$, $\mathrm{V}(y_t) = \sigma^2 t$ болох учраас дисперс хугацаанаас хамааран төгсгөлгүй өснө.

Санамсаргүй шилжих процессийн AR(1) стационар процессоос ялгагдах ялгаа нь (12.43) тэгшитгэлд ε_t алдааны нөлөө арилдаггүйд оршино: $y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \cdots$. Гэтэл (12.36) тэгшитгэлд алдааны нөлөө хугацаа өсөхөд арилдаг билээ: $y_t = \varepsilon_t + \phi\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots$ ($m = 0$ үед).

(12.36) хэлбэрийн процесс $|\phi| > 1$ үед стационар биш болохыг хялбархан үзүүлж болно (эдийн засгийн бодот жишээн дээр үл тааралдана).

12.3.1 Нэгж язгуурууд

Тэг дундаж бүхий,(12.37) хэлбэрт өгөгдсөн AR(1) процесс авч үзье.

$$A(L)y_t = (1 - \phi L)y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2). \tag{12.45}$$

Өмнөх зүйлээс (12.45) процесс стационар байх зайлшгүй нөхцөл нь $|\phi| < 1$ болохыг бид мэдэх билээ. Өөрөөр хэлбэл, $A(L)^{-1} = (1-\phi L)^{-1}$ урвуу оператор оршин байна гэсэн үг.

AR(2) процессийн хувьд

$$A(L)y_t = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2)y_t = \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2). \tag{12.46}$$

Аливаа олон гишүүнтийн адил $A(L)$ нь комплекс тоон талбар дээр үржигдэхүүнд задарна:

$$A(L) = (1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L). \tag{12.47}$$

$A(L)^{-1}$ урвуу оператор орших зайлшгүй нөхцөл нь (12.47)–ийн үржигдэхүүн тус бүр урвуутай байх явдал юм. Энэ нь бүх λ_i модулиараа нэгээс бага гэсэн үг. Энэ нөхцөл нь, "$A(x)$ олон гишүүнтийн бүх $\mu_i = 1/\lambda_i$ язгуур нь нэгж радиустай тойргийн гадна оршино" гэж томъёологдоно.

(12.45)–д нэгж язгуур байгаа нь процессийн шинж чанарт мэдэгдэхүйц нөлөөлж байсныг өмнөх зүйлээс мэдэх билээ.

(12.45)–д $\phi = 1$ гэдэг нь үнэн үү?, үүийг ажиглалтын утгаар яаж тодорхойлох вэ?

Үүнтэй төстэй таамаглалыг шалгахдаа $t = (\widehat{\phi} - \phi)/s_{\widehat{\phi}}$ гэсэн Стьюдентийн тархалттай t-статистик болон хязгаартаа стандарт хэвийн тархалт бүхий шинжүүр ашигладаг болохыг Бүлэг 3–аас мэдэх билээ. Гэвч Дики, Фуллер нар (D.A.Dickey, W.A.Fuller) жинхэнэ утга нь $\phi = 1$ бол t статистик Стьюдентийн хуульд захирагдахгүй, ажиглалтын тоо ихсэхэд стандарт нормал тархалт руу нийлэхгүй гэдгийг харуулсан. $\phi = 1$ үед t статистикийн тархалтыг (12.45) тэгшитгэл ба түүний 2 хувилбарын хувьд дүрсэлжээ:

$$y_t = b_1 y_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \tag{12.48}$$

$$y_t = a_2 + b_2 y_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \tag{12.49}$$

$$y_t = a_2 + b_3 y_{t-1} + +c_3 t + \varepsilon_{3t}. \tag{12.50}$$

(12.49) нь сул гишүүн агуулсан тохиолдолд, (12.50) нь сул гишүүнээс гадна хугацааны тренд агуулсан тохиолдолд тус тус харгалзана. Хүснэгт 12.1–д Дики-Фуллерийн (DF) статистикийн нэг талт критик утгуудыг үзүүлэв. (12.49) тэгшитгэлийн хувьд $\mathbf{H}_0 : \ \phi = 1$ таамаглалыг $\mathbf{H}_1 : \ \phi < 1$ гэсэн өрсөлдөх таамаглалын нөхцөлд, 100 ажиглалтын утгуудаар 5% итгэх түвшинд шалгаж байгаа гэе. Энэ тохиолдолд таамаглал шалгах стандарт процедур ашигласан гэвэл t статистикийн -1.66–аас бага утганд $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг няцаадаг бол Хүснэгт 12.1–ээс харахад t стаистикийн -2.89–өөс бага утганд $\mathbf{H}_0$ таамаглалыг няцаах ёстой болж байна.

Иймээс бид нэгж язгуур байгаа үед стандарт процедурыг ашигласнаар үнэн таамаглалыг ямагт няцаахад хүрч байна.

Итгэх түвшин	Түүврийн хэмжээ			
	25	50	100	∞
AR загвар (12.48)				
0.010	-2.66	-2.62	-2.60	-2.58
0.025	-2.26	-2.25	-2.24	-2.23
0.050	-1.95	-1.95	-1.95	-1.95
Сул гишүүн агуулсан AR загвар (12.49)				
0.010	-3.75	-3.58	-3.51	-3.43
0.025	-3.33	-3.22	-3.17	-3.12
0.050	-3.00	-2.93	-2.89	-2.86
Тренд ба сул гишүүн агуулсан AR загвар (12.50)				
0.010	-4.38	-4.15	-4.04	-3.96
0.025	-3.95	-3.80	-3.69	-3.66
0.050	-3.60	-3.50	-3.45	-3.41

Хүснэгт 12.1:

Хэрэв (12.48)–(12.50) регрессийн баруун талд $\delta y_{t-1},\ \delta y_{y-2}, ...$-хэлбэрийн нэмэгдэхүүнүүдийг оруулбал Хүснэгт 12.1 байгаа критик утгууд үнэн байдаг нь сонирхолтой баримт юм. Энэ нь 1–ээс дээш эрэмбийн AR загварт нэгж язгуур байгааг шалгах боломж олгож байгаа юм. Баруун талдаа $\delta y_{t-1},\ \delta y_{y-2}, \ldots$ өөрчлөлтүүдийн лагтай утгуудыг агуулсан тэгшитгэлүүдэд харгалзах тестийг Дики-Фуллерийн өргөтгөсөн тест (*augmented DF test, ADF*) гэнэ.

Хэрэв, тухайлбал, (12.46) тэгшитгэлд нэгжийн 1 язгуур бий гэвэл $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_2| < 1$. Харин $1 + \lambda_2 = \phi_1$ ба $1 \cdot \lambda_2 = -\phi_2$ гэдгээс $\phi_1 + \phi_2 = 1$, $|\phi_2| < 1$ гэж мөрднө. (12.46) тэгшитгэлийг дараах хэлбэртэй бичиж болно.

$$y_t = (\phi_1 + \phi_2)y_{t-1} - \phi_2(y_{t-1} - y_{t-2}) + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \qquad (12.51)$$

эсвэл

$$\Delta y_t = (\phi_1 + \phi_2 - 1)y_{t-1} - \phi_2 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \qquad (12.52)$$

Иймээс нэгж язгуур байгаа тухай таамаглалыг шалгахдаа дээр тодорхойлсон Дики-Фуллерийн процедурын үзэл санаагаар хэрэгжүүлж болно.

Хэрэв AR(p) процессийн эрэмбэ анхнаасаа мэдэгдэхгүй байсан бол алдааны боломжит автокорреляцийг заах үүднээс олон тооны лагуудыг оруулж өгөх хэрэгтэй. Учир нь ADF тестэд алдааг цагаан шуугиан гэж үзэх ба Хүснэгт 12.1 заасан критик утгууд зөвхөн энэ нөхцөлд үнэн банйа. Гэвч хэтэрхий олон тооны лаг оруулах нь тестийн чадлыг бууруулна. Тэгшитгэлд оруулах лагуудын тоог тодорхойлохын тулд хойно үзэх ARMA загварын эрэмбийг сонгох шинжүүрийг ашиглаж болно. Дики-Фуллерийн тестийг эконометрикийн орчин үеийн бүх программуудад оруулсан байдгийг тэмдэглэе.

12.3.2 Хуурмаг регресс

Өмнөх зүйлд, нэгж язгууртай авторегрессийн процесстой холбоотой асуудлуудыг авч үзсэн. Стационар биш хугацааны цуваа оролцсон регрессийн өөр нэг жишээ авч үзье.

Үл хамаарах, санамсаргүй 2 шилжилт авъя.

$$x_t = x_{t-1} + \varepsilon_{1t}, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_1^2),$$
$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_{2t}, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma_2^2), \quad t = 1, ..., n \tag{12.53}$$

ε_1, ε_2-хамааралгүй учраас x ба y–ийн хооронд ерөнхий зүйл байхгүй. Судлаач , x ба y–ээр төрөгдөх механизмыг мэдэхгүй бөгөөд дараах регрессийг үнэлж байгаа гэе:

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t \tag{12.54}$$

Хэрэв (12.54)–ийн хамаарлын нөлөөг t статистикийн тусламжтай шалгана гэвэл мэдэгдэхгүй хамаарал байгаа тухай худал дүгнэлт гарах магадлал өндөр болохыг имитаци загварчлаыын аргуудаар харуулжээ (Granger, Newbold, 1974). Үүний шалтгаан нь ε_t алдаа стационар процесс биш учраас (12.54) нь сонгодог регрессийн нөхцлүүдийг эс хангадагт оршино. (12.54) тэгшитгэлийн ХБК-үнэлэлтийн хувьд асимптотлог онол нь эрс өөр болохыг Филлипс (Philips, 1986) харуулжээ. Тухайлбал, t-статистик нь хязгаарын тархалтгүй, $n \to \infty$ үед сарнидаг байна. Ийм учраас түүврийн хэмжээ хичнээн их байх тутам худал дүгнэлтэнд хүрэх нь төчнөөн их. Ийм байдлыг хуурмаг регресс (*spurious regression*) гэнэ. Практикт хуурмаг регрессийн шинж тэмдэг гэвэл, R^2 коэффициентийн утга өндөр, Дарбин-Уотсоны DW-статистикийн утга бага гарах явдал юм.

Жишээ. Хуурмаг регресс.

(12.53)–д харгалзах 2 бүлэг ажиглалтуудыг нэгтгэв. Үүнд, $y_0 = x_0 = 0$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. $n = 300$ ажиглалтын хувьд зохиосон регрессийн ур дүнг доор үзүүлэв.

$$y_t = \underset{(-5.77)}{-2.79} - \underset{(-21.5)}{0.52}x_t; \quad R^2 = 0.607, \quad DW = 0.057$$

Хаалтанд t статистикийн утгуудыг заав. Энэ жишээнд хэдийгээр хуурмаг регресс ч гэсэн ХБК-үнэлэлтийн нийтлэг төлөв ажиглагдаж байна.

12.3.3 Коинтеграци

Стационар биш цувааны регрессийн хувьд аюул тохиолдож болохыг өмнөх жишээ үзүүлж байна. Гэвч, үйл хэрэг үргэлж найдваргүй гэж үзэж үл болно. Хугацааны стационар биш цувааны регрессд хандах анхны хандлагыг Энгель, Гранжер (Engel an Granger, 1987) нар дэвшүүлжээ.

Бидэнд стационар биш цуваа x_t-өгөгдсөн байг. Түүний эхний ялгаварыг авъя: $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$. Хэрэв Δx_t цуваа стационар бол x_t–г интегралчлагдах 1 эрэмбэтэй гээд $I(1)$ гэж тэмдэглэнэ. Стационар цуваа Δx_t–г $I(0)$ гэнэ. Ерөнхий тохиолдолд, цуваа өөрөө болон түүний k хүртэл эрэмбийн ялгаварууд нь стационар биш, k эрэмбийн ялгавар нь стационар байвал уг цувааг интегралчлагдах k эрэмбэтэй ($I(k)$) гэнэ.

Бидэнд x_t, y_t гэсэн хоёр $I(1)$ цуваа өгөгдсөн байг. Мөн тэдгээрийн шугаман эвлүүлэг $y_t - \beta x_t$ стационар байг. Энэ тохиололд x_t, y_t цуваануудыг коинтегралчлагдсан (*cointegrated*) $(1, -\beta)'$ векторыг коинтегралчлагч вектор гэж тус тус нэрлэнэ. Тэгвэл, энэ үед

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, ..., n. \tag{12.55}$$

тэгшитгэлд ХБК арга хэрэглэж зохимжтой үнэлэлт $\widehat{\beta}$–г гарган авч болно. Үнэлэлтийн хязгаарын чанарууд энэ үед өөр байна. Тухайлбал, ердийн үед $\sqrt{n}(\widehat{\beta}-\beta)$ хязгаартаа хэвийн тархалттай байдаг бол манай тохиолдолд $n(\widehat{\beta}-\beta)$ нь хязгаарын ямар нэг тархалттай байна. Ийм үнэлэлтийг супер зохимжтой гэх ба сонгодог регрессийг бодвол жинхэнэ утга руугаа түргэн нийлдэг байна.

Иймээс коинтеграц байгаа эсэхийг шалгахын тулд коинтегралчлагч (12.55) тэгшитгэлээс ХБК-үнэлэлтээр гарган авсан $\boldsymbol{e_t}$ үлдэгдэлүүдийг авч үзэх шаардлагатай.

Тэг таамаглал нь “коинтеграц байхгүй” гэж томъёологдох ба энэ нь үлдэгдлүүдийн цуваа $\boldsymbol{e_t}$–д нэгж язгуур байна гэсэн үг юм. Гэвч $\boldsymbol{e_t}$ цувааг шалгахдаа DF ба ADF тестүүдийг ашиглаж болохгүй гэдгийг харуулсан байдаг (Philips and Ouliaris, 1990). Харин Маккиннон, Дэвидсон (Mackinnon, 1991; Davidson and Mackinnon, 1993) нар имитаци загварчлалын аргаар t-статистикийн критик утгуудыг (хязгаарын) манай тохиолдолд тааруулан нарийвчилж олсон байна.

Эдгээр утгуудыг Хүснэгт 12.2–д үзүүлэв. Таблицийн эхний багананд коинте-

Хувьсагчийн тоо	Тестийн төрөл	Итгэх түвшин		
		0.01	0.05	0.10
2	тогтмол	−3.90	−3.34	0.10
	тогтмол ба тренд	−4.32	−3.78	−3.50
3	тогтмол	−4.29	−3.74	−3.45
	тогтмол ба тренд	−4.66	−4.12	−3.84
4	тогтмол	−4.64	−4.10	−3.81
	тогтмол ба тренд	−4.97	−4.43	−4.15
5	тогтмол	−4.96	−4.42	−4.13
	тогтмол ба тренд	−5.25	−4.72	−4.43
6	тогтмол	−5.25	−4.71	−4.42
	тогтмол ба тренд	−5.52	−4.98	−4.70

Хүснэгт 12.2:

грацын тэгшитгэлд байгаа экзоген хувьсагчдын тоог үзүүлсэн ((12.55) тэгшитгэлийн хувьд хувьсагчийн тоо 2).

Коинтеграцын ойлголт нь удаан хугацааны динамик тэнцвэрийн (*long-run equilibrium*) үзэл санаатай холбоотой юм. Хэрэв x_t ба y_t коинтегралчлагдах бол y_t ба βx_t нь стационар биш ерөнхий компонентийг агуулна. Харин $y_t-\alpha-\beta x_t$ ялгавар нь стационар байх ба тэгийн орчинд хэлбэлзэнэ.

12.4 Бокс-Дженкинсийн загвар (ARIMA)

Энэ бүлгийн өмнөх хэсгүүдэд, хугацааны хэд хэдэн цуваа агуулсан янз бүрийн загваруудад регрессийн анализын аргуудыг хэрхэн хэрэглэх тухай авч үзсэн билээ. Энэ хэсэгт хугацааны цувааны загварыг явцуу утгаар нь авч үзнэ. Өөрөөр хэлбэл, зөвхөн хугацааны өмнөх агшин дахь утгыг оруулсан хугацааны цувааны төлөв байдлыг тайлбарласан загваруудыг авч үзэх юм. Хугацааны стационар ба стационар биш цувааны статистик чанарууд эрс ялгаатай учраас тэдгээрийг загварчлахад өөр өөр арга хэрэглэх нь зүйн хэрэг. Энэ хэсэгт үндсэндээ Бокс-Дженкинсийн загварын тухайн тохиолдол болох стационар цувааны ARMA загваруудыг судална. Чухам яагаад хугацааны стационар цуваанд илүү анхаарал тавиад байна вэ? Учир нь ихэнх хугацааны цуваа улирлын компонент болон трендийг ялгах, эсвэл ялгавар авах хувиргалт хийсний дараа стационар цуваанд шилждэгт оршино.

12.4.1 Тренд, улирлын компонент, ялгавар авах

Стационар биш, хугацааны цувааны янз бүрийн жишээ авч үзье.

Тренд. Дараах хугацааны цуваа авъя:

$$y_t = \alpha + \beta t + \varepsilon_t \tag{12.56}$$

Энд, y_t цуваа нь санамсаргүй биш нэмэгдэхүүн $\alpha + \beta t$ (шугаман тренд), санамсаргүй хэмжигдэхүүн ε_t–ээс тогтох ба тэг дундажтай, хугацааны стационар цуваа юм. Үүнээс гадна квадратлаг: $\alpha + \beta t + \gamma t^2$, экспонциал: $\alpha e^{\beta t}$ гэх мэт трендийн бусад жишээ байнга тааралдана.

(12.56) ба түүнтэй төстэй загваруудад трендийг ялгахын тулд t–г үл хамаарах хувьсагч гэж тооцоод регрессийн параметрүүдийг үнэлэх ердийн техникийг хэрэглэж болно. Үүний дараа хугацааны стационар цувааны загварт хэрэглэх үлдэгдлүүдийн цувааг гарган авна.

Улирлын компонент. Эдийн засгийн ихэнх өгөгдөл (data) улирлын компонетийг агуулсан байдаг. Улирлын компоненттай ажиглалтын утгууд 4–өөр үелсэн байна:

$$y_t = S(t) + \varepsilon_t, \quad S(t+4) \equiv S(t). \tag{12.57}$$

Үүнд, y_t цуваа нь санамсаргүй биш, үет гишүүн $S(t)$ (улирлын компонент) ба тэг дундажтай, хувацааны стационар цуваа болох санамсаргүй гишүүн ε_t–ийн нийлбэрээс тогтоно. Улиралын компонент $S(t)$–г $S(t) = \beta_1 d_{1t} + \beta_2 d_{2t} + \beta_3 d_{3t} + \beta_4 d_{4t}$ хэлбэртэй бичиж болно. d_i нь бинар хувьсагчид (*dummy*). Улирлын компонентийг ялгахын тулд дараах тэгшитгэлд регрессийн параметрүүдийг үнэлэх аргыг хэрэглэнэ.

$$y_t = \beta_1 d_{1t} + \beta_2 d_{2t} + \beta_3 d_{3t} + \beta_4 d_{4t} + \varepsilon_t. \tag{12.58}$$

(12.58) загварт тогтмол гишүүнийг оруулах замаар ихэвчлэн зааглалтай регрессийн хэлбэрт дүрсэлдэг:

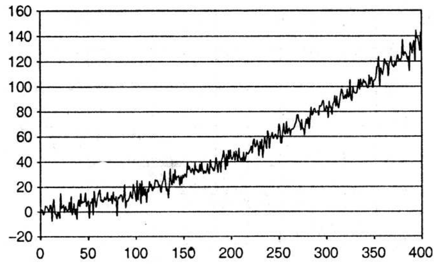
$$y_t = \alpha + \beta_1 d_{1t} + \beta_2 d_{2t} + \beta_3 d_{3t} + \beta_4 d_{4t} + \varepsilon_t, \quad \sum \beta_i = 0. \tag{12.59}$$

(12.59)–д β_i нь i улиралд жилийн дундаж түвшингээс хазайх хазайлтыг илэрхийлнэ.

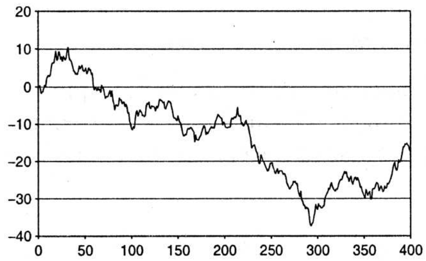
Тренд ялгах тохиолдлын адилаар хугацааны стационар цувааг загварчлах аргууд нь цаашид (12.58) регрессийн үлдэгдэл цуваанд хэрэглэгдэнэ. Зураг 12.1–12.4–т хугацааны стационар биш цувааны графикийн жишээг үзүүлэв.

Дараалсан ялгавар авах. Хугацааны стационар биш цувааны жишээ нь санамсаргүй шилжилт (12.43) билээ. Гэвч, түүнд дараалсан ялгавар авах үйлдлийг хэрэглэвэл хугацааны стационар цуваа үүснэ.

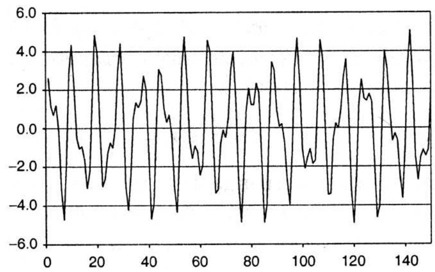
$$z_t = \Delta y_t = (1 - L) y_t = y_t - y_{t-1}, \quad z_t = \varepsilon_t.$$



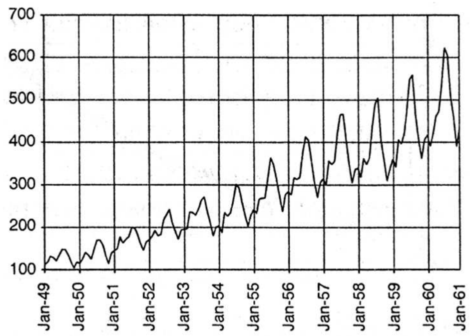
Зураг 12.1: Тренд



Зураг 12.2: Санамсаргүй шилжилт



Зураг 12.3: Улирлын нөлөө



Зураг 12.4: Тренд болон улирлын нөлөө

$A(L)$ нь 1 нэгж язгууртай өөрөөр хэлбэл $A(L) = B(L)(1-L)$ бөгөөд $B(L)$–ийн бүх язгуурууд нэгж дугуйн гадна оршдог байг. Тэгвэл илүү ерөнхий $A(L)y_t = \varepsilon_t$ процессийн хувьд $z_t = \Delta y_t$ хувиргалт нь $B(L)z_t = \varepsilon_t$ гэсэн стационар процесст хүргэдэг.

Шугаман трендтэй (12.56) цуваанаас ялгавар авахад мөн стационар процесс болж өөрчлөгддөг.

$$\Delta y_t = \beta + u_t, \quad u_t = \Delta\varepsilon_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}. \tag{12.60}$$

Загвар $\alpha + \beta t + \gamma t^2$–квадратлаг трендтэй тохиолдолд I эрэмбийн ялгавар авахад стационар цуваанд шилждэггүй байна. Харин II эрэмбийн ялгавар авбал $\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = (y_t - y_{t-1}) - (y_{t-1} - y_{t-2})$ буюу

$$\Delta y_t = \beta + \gamma(2t-1) + \Delta\varepsilon_t,$$

$$\Delta^2 y_t = 2\gamma + \Delta^2\varepsilon_t,$$

болж $\Delta^2 y_t$ аль хэдийн хугацааны стационар цуваа болсон байна.

Улирлын дараалсан ялгавар авах $\Delta_4 y_t = (1-L^4)y_t = y_t - y_{t-4}$ операторын тусламжтайгаар (12.57) тэгшитгэлээс улирлын компонентыг зайлуулж болно (хэрэв улирлын компонентын үе нь 12 бол Δ_{12} операторыг хэрэглэнэ).

Дараалсан ялгаварт операторыг хэрэглэх нь стационар биш цуваag заавал стационар цуваанд шилжүүлэх албагүй . Тухайлбал

$$y_t = \beta y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \beta > 1 \tag{12.61}$$

процесс стационар биш. (12.61)–ийн 2 талаас дисперс авбал $\mathrm{V}(y_t) = \beta^2\mathrm{V}(y_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2$. Хэрэв стационар байх нөхцөл биелдэг бол дисперс нь $\mathrm{V}(y_t) = \mathrm{V}(y_{t-1})$ буюу $\mathrm{V}(y_t) = \sigma_\varepsilon^2/(1-\beta^2) < 0$ байх ёстой. Энэхүү сөрөг дисперс нь $\mathrm{V}(y_t) \neq \mathrm{V}(y_{t-1})$ гэсэн дүгнэлтэнд хүргэнэ. Өөрөөр хэлбэл, (12.61) цуваа стационар биш. (12.61)–д ялгаварт операторыг хэрэглэвэл:

$$\Delta y_t = \beta\Delta y_{t-1} + \Delta\varepsilon_t, \quad \beta > 1 \tag{12.62}$$

болж урьдын адил процесс стационар биш хэвээр үлдэнэ. (12.62)–т алдааны корреляц байгаа нь асуудлыг улам хүндрүүлнэ. Ялгаварт операторыг давтан хэрэглэх нь стационар цуваанд үл хүргэнэ.

Иймээс улирлын компонент болон трендийг ялгах эсвэл дараалсан ялгавар оператор ашиглах замаар өгөгдсөн цуваанаас ямагт стационар цуваag ялган авч болно. Одоо ажиглалтын өгөгдсөн утгуудаар цуваа стационар эсэхийг яаж тогтоох тухай асуудал үлдлээ.

12.4.2 Стационар чанарыг шалгах

Нэгдүгээрт: түүврийн утгуудаар байгуулсан графикаас тренд болон улирлын компонент илэрхий агуулсан эсэхийг ажиглана. Мөн түүнчлэн хугацаанаас хамаарч ажиглалтын сарнил өсөж эсвэл буурч болно. Энэ нь дундаж болон дисперсийн хугацааны хамаарлыг зааж байгаа юм. Магадгүй бүр цуваа стационар биш ч байж болох юм.

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.977	0.977	382.92	0.000
		2	0.970	0.329	760.97	0.000
		3	0.964	0.159	1135.3	0.000
		4	0.954	-0.009	1503.4	0.000
		5	0.947	0.014	1866.6	0.000
		6	0.939	-0.017	2224.4	0.000
		7	0.929	-0.029	2576.1	0.000
		8	0.924	0.075	2924.9	0.000
		9	0.915	-0.041	3267.5	0.000
		10	0.905	-0.063	3603.5	0.000
		11	0.900	0.072	3936.6	0.000
		12	0.892	0.000	4264.6	0.000
		13	0.884	0.006	4588.1	0.000
		14	0.879	0.041	4908.4	0.000
		15	0.871	-0.023	5223.7	0.000
		16	0.864	-0.006	5535.1	0.000
		17	0.855	-0.073	5840.6	0.000
		18	0.847	-0.003	6141.0	0.000
		19	0.841	0.036	6437.9	0.000
		20	0.834	0.013	6730.7	0.000
		21	0.824	-0.044	7017.6	0.000
		22	0.817	-0.003	7300.5	0.000
		23	0.808	-0.032	7578.0	0.000
		24	0.802	0.028	7851.4	0.000
		25	0.795	0.028	8121.1	0.000
		26	0.786	-0.026	8385.5	0.000

Зураг 12.5: Тренд

Хоёрдугаарт: түүврийн автокорреляцийн функцийн график(ACF), эсвэл *коррелограмм* (*correlogramm*) байгуулна.

$$r_k = \widehat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(y_t - \overline{y})(y_{t-k} - \overline{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2}, \quad k = 1, 2, ... \tag{12.63}$$

Хугацааны стационар цувааны коррелограмм эхний хэдэн утгын дараа k–г өсгөхөд маш хурдан буурдаг. Хэрэв график хангалттай удаан буурч байвал цувааг стационар биш гэж үзэх үндэстэй. ACF–ээс гадна тухайн автокорреляцийн функцийг (PACF) байгуулж болох ба стационар процессийн хувьд PACF маш хурдан буурна.

Тухайн автокорреляцийн функц (PACF). Бүлэг 4–т тухайн корреляцийн коэффициенттой танилцсан. Тухайн автокорреляцийн функц PACF(k) (*partial autocorrelation function*) гэдэг нь $y_{t-1}, y_{t-2}, ...,$ y_{t-k+1}-завсрын утгуудын нөлөө байхгүй үеийн y_t, y_{t-k}–ийн хоорондох "цэвэр корреляц" юм.

Хэрэв түүврийн тухайн автокорреляцийн коэффициентийг бодох процедурыг хэрэглэвэл, y_t–гэсэн стационар цувааны хувьд түүврийн тухайн автокорреляцийн функц PACF(k) нь дараах регрессийн тэгшитгэлээр илэрхийлэгдэх AR(k) загварын сүүлчийн коэффициент β_k–ийн ХБК-үнэлэлт мэтээр олдоно.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 y_{t-1} + \beta_2 y_{t-2} + \cdots + \beta_k y_{t-k} + \varepsilon_t. \tag{12.64}$$

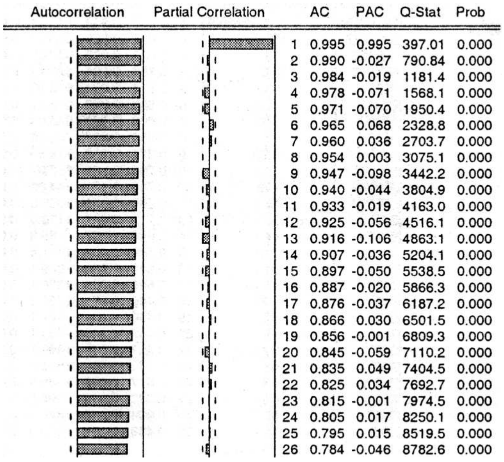
Зураг 12.5–12.8 болон Зураг 12.1–12.4–т хугацааны стационар биш цувааны автокорреляцийн болон тухайн автокорреляцийн функцийг үзүүлэв.

Гуравдугаарт: § 12.3 хэсэгт авч үзсэн нэгж язгуур байгаа үеийн формаль тестийг ашиглаж болно (Дики-Фуллерийн DF тест, Дики-Фуллерийн өргөтгөсөн тест ADF гэх мэт).

12.4.3 Авторегрессийн ба шилжих дунджийн загвар (ARMA)

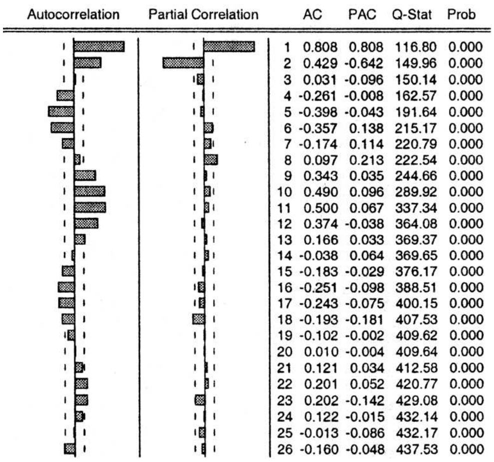
Доор өгөгдсөн хугацааны стационар цувааны ангийг авч үзье:

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} - \cdots - \phi_p y_{t-p} = \delta + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1} - ... - \theta_q \varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2). \tag{12.65}$$



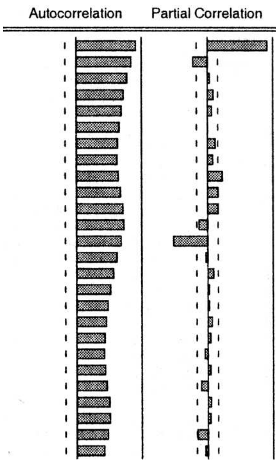
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.995	0.995	397.01	0.000
2	0.990	-0.027	790.84	0.000
3	0.984	-0.019	1181.4	0.000
4	0.978	-0.071	1568.1	0.000
5	0.971	-0.070	1950.4	0.000
6	0.965	0.068	2328.8	0.000
7	0.960	0.036	2703.7	0.000
8	0.954	0.003	3075.1	0.000
9	0.947	-0.098	3442.2	0.000
10	0.940	-0.044	3804.9	0.000
11	0.933	-0.019	4163.0	0.000
12	0.925	-0.056	4516.1	0.000
13	0.916	-0.106	4863.1	0.000
14	0.907	-0.036	5204.1	0.000
15	0.897	-0.050	5538.5	0.000
16	0.887	-0.020	5866.3	0.000
17	0.876	-0.037	6187.2	0.000
18	0.866	0.030	6501.5	0.000
19	0.856	-0.001	6809.3	0.000
20	0.845	-0.059	7110.2	0.000
21	0.835	0.049	7404.5	0.000
22	0.825	0.034	7692.7	0.000
23	0.815	-0.001	7974.5	0.000
24	0.805	0.017	8250.1	0.000
25	0.795	0.015	8519.5	0.000
26	0.784	-0.046	8782.6	0.000

Зураг 12.6: Санамсаргүй шилжилт



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.808	0.808	116.80	0.000
2	0.429	-0.642	149.96	0.000
3	0.031	-0.096	150.14	0.000
4	-0.261	-0.008	162.57	0.000
5	-0.398	-0.043	191.64	0.000
6	-0.357	0.138	215.17	0.000
7	-0.174	0.114	220.79	0.000
8	0.097	0.213	222.54	0.000
9	0.343	0.035	244.66	0.000
10	0.490	0.096	289.92	0.000
11	0.500	0.067	337.34	0.000
12	0.374	-0.038	364.08	0.000
13	0.166	0.033	369.37	0.000
14	-0.038	0.064	369.65	0.000
15	-0.183	-0.029	376.17	0.000
16	-0.251	-0.098	388.51	0.000
17	-0.243	-0.075	400.15	0.000
18	-0.193	-0.181	407.53	0.000
19	-0.102	-0.002	409.62	0.000
20	0.010	-0.004	409.64	0.000
21	0.121	0.034	412.58	0.000
22	0.201	0.052	420.77	0.000
23	0.202	-0.142	429.08	0.000
24	0.122	-0.015	432.14	0.000
25	-0.013	-0.086	432.17	0.000
26	-0.160	-0.048	437.53	0.000

Зураг 12.7: Улирлын нөлөө



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.948	0.948	132.14	0.000
2	0.876	-0.229	245.65	0.000
3	0.807	0.038	342.67	0.000
4	0.753	0.094	427.74	0.000
5	0.714	0.074	504.80	0.000
6	0.682	0.008	575.60	0.000
7	0.663	0.126	643.04	0.000
8	0.656	0.090	709.48	0.000
9	0.671	0.232	779.59	0.000
10	0.703	0.166	857.07	0.000
11	0.743	0.171	944.39	0.000
12	0.760	-0.135	1036.5	0.000
13	0.713	-0.540	1118.0	0.000
14	0.646	-0.027	1185.6	0.000
15	0.586	0.091	1241.5	0.000
16	0.538	0.025	1289.0	0.000
17	0.500	0.033	1330.4	0.000
18	0.469	0.073	1367.0	0.000
19	0.450	0.048	1401.1	0.000
20	0.442	-0.046	1434.1	0.000
21	0.457	0.046	1469.9	0.000
22	0.482	-0.100	1510.0	0.000
23	0.517	0.052	1556.5	0.000
24	0.532	0.048	1606.1	0.000
25	0.494	-0.163	1649.2	0.000
26	0.438	-0.036	1683.3	0.000

Зураг 12.8: Тренд болон улирлын нөлөө

Оператор ашиглан товчоор бичвэл:

$$\Phi(L)y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2). \tag{12.66}$$

Үүнд, $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$, $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q$ - шилжүүлэх оператороос хамаарсан олон гишүүнт. Дээрх загварыг авторегрессийн ба шилжих дунджийн (*autoregressive moving average*) буюу ARMA(p,q) загвар гэж нэрлэнэ. Эхлээд ARMA загварын хялбар жишээ авч үзье.

AR(1) *процесс.* ARMA$(1,0)$ процесс нь

$$y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \tag{12.67}$$

гэсэн AR(1) процесс юм. Энэ тухай (12.35)–(12.42)–д тодорхой авч үзсэн билээ. Харин түүний чанаруудаас товч дурьдвал

$$\mathrm{E}(y_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}, \quad \mathrm{V}(y_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}$$

$$\gamma_k = \phi_1^k \gamma_0, \quad \rho_k = \gamma_k / \gamma_0 = \phi_1^k. \tag{12.68}$$

$|\phi_1| < 1$ тэнцэтгэл биш нь y_t процесс стационар байх зайлшгүй нөхцөл юм.

$k > 1$ утганд AR(1) процессын тухайн автокорреляцийн функц нь тэгтэй тэнцүү (тодорхойлолт ёсоор ACF(1) = PACF(1)).

AR(2) *процесс.* Өндөр эрэмбийн авторегрессийн процессийн жишээ болгон AR(2) процессийг авъя (хялбарыг бодож сул гишүүнийг тэгтэй тэнцүү гэе):

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2) \tag{12.69}$$

$k > 0$ үед (12.69)–ийн хоёр талаас y_t ба y_{t-k}–ийн ковариацийг бодъё:

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \mathrm{Cov}(\phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, y_{t-k}) = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} \tag{12.70}$$

γ_0–д хуваавал:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}, \quad k = 1, 2, ... \tag{12.71}$$

(12.71) тэгшитгэлд $k = 1, 2$ үед $\rho_0 = 1$, $\rho_{-1} = \rho_1$ болохыг тооцвол ρ_1, ρ_2 үл мэдэгдэгч бүхий тэгшитгэлийн систем үүснэ

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \phi_1 + \phi_2 \rho_1, \\ \rho_2 &= \phi_1 \rho_1 + \phi_2. \end{aligned} \tag{12.72}$$

AR(2) процессийн хувьд (12.72)–ыг Юл-Уолкерийн (*Yule-Walker*) тэгшитгэлийн систем гэнэ. Энэ системийг бодож автокорреляцийн функцийн эхний 2 утгыг бодвол

$$\rho_1 = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \quad \rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2. \tag{12.73}$$

Автокорреляцийн функцийн бусад утгууд (12.71) томъёогоор олдоно. Хэрэв (12.69) тэгшитгэлийн хоёр талыг y_t–ээр үржүүлж, математик дундаж авбал y_t–ийн дисперсийн хувьд дараах илэрхийлэл гарна

$$\gamma_0 = \phi_1 \gamma_1 + \phi_2 \gamma_2 + \sigma^2. \tag{12.74}$$

Энэ тэгшитгэлийг $k = 1, 2$ үеийн (12.70) тэгшитгэлтэй хамт бодвол:

$$\gamma_0 = \frac{(1-\phi_2)\sigma^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}. \tag{12.75}$$

Эндээс, дисперс эерэг байхыг тооцвол AR(2) процессийн стационар байх нөхцөл нь:

$$|\phi_2| < 1, \quad \phi_2 + \phi_1 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1. \tag{12.76}$$

Стационар нөхцөл биелэгдэх үед процессийн автокорреляцийн функц, хэрэв $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2$ характеристик олон гишүүнтийн язгуур бодитой бол экспоненциалаар буурна, харин комплекс язгууртай үед экспоненциалаар буурах амплитуд бүхий синусоидоор өөрчлөгдөнө гэдгийг харуулж болно.

AR(2) процессийн хувьд тухайн автокорреляцийн функцийг бодох ерөнхий схемийг дүрслэе. Мөн AR(3) процессийн хувьд Юл-Уолкерийн гурван тэгшитгэл бичъе. ϕ_3 коэффициент нь y_t болон y_{t-3}-ын хоорондох тухайн корреляцийн коэффициенттэй тэнцүү. AR(2) процессийн хувьд (12.71) тэгшитгэлээс $\rho_3 = \phi_1\rho_2 + \phi_2\rho_1$ гэж гарна. Энэ илэрхийллийг Юл-Уолкерийн гурав дахь тэгшитгэлд тавибал $\phi_3 = 0$ гэж гарна. Иймд $k > 2$ үед PACF(k) $= 0$ болно. Үүнтэй адил AR(k) процессийн хувьд $k = p + 1$–ээс эхлэн тухайн автокорреляцийн функц PACF(k) нь тэгтэй тэнцүү гэдгийг баталж болно. Энэ үр дүн тухайн автокорреляцийн онолын функцийн хувьд биелэгдэх боловч түүврийн тухайн автокорреляцийн функцийн хувьд үл биелэнэ. Гэвч практикт PACF–ийн утга тэгд ойрхон утганд хүртэл огцом буурахыг хүлээх хэрэгтэй.

Шилжих дунджийн процесс (MA). ARMA($0, q$) загварыг шилжих дунджийн q-эрэмбийн загвар гээд:

$$y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q}, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2), \tag{12.77}$$

MA(q) гэж тэмдэглэнэ. (12.77) тэгшитгэлээс, дурын q болон дурын θ_i–ийн хувьд MA(q) процесс стационар болох нь харагадаж байна.

Процесс урвуутай байх нөхцлийг томьёолъё. Өөрөөр хэлбэл, түүнийг AR процессоор дүрслэх боломжийг сонирхоё.

Жишээ болгож, шилжих дунджийн 1–р эрэмбийн загвар MA(1)–ийг авъя.

$$y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2). \tag{12.78}$$

MA(1) процессийг авторегрессийн процессоор дүрсэлбэл:

$$\Theta(L)^{-1}y_t = \Theta(L)^{-1}\delta + \varepsilon_t, \tag{12.79}$$

эсвэл

$$y_t = \frac{\delta}{1-\theta_1} - \theta_1 y_{t-1} - \theta_1^2 y_{t-2} - \cdots + \varepsilon_t. \tag{12.80}$$

(12.78) тэгшитгэлээр илэрхийлэгдэх MA(1) процессийн AR(∞) хэлбэрийн энэхүү дүрслэл $\Theta(L) = 1-\theta_1 L$ операторын урвуутай үед л боломжтой юм. Өөрөөр хэлбэл, урвуутай байх $|\theta_1| < 1$ нөхцөл биелэгдэх явдал юм.

MA(1) процессийн дундаж болон дисперсийг бодвол:

$$\mathrm{E}(y_t) = \delta, \quad \mathrm{V}(y_t) = \sigma^2(1+\theta_1^2). \tag{12.81}$$

MA(1) процессийн автокорреляцийн функц нь

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \mathrm{E}((\varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1})(\varepsilon_{t-1} - \theta_1\varepsilon_{t-2})). \tag{12.82}$$

Хэрэв хаалт задалбал, 4 нэмэгдэхүүний зөвхөн нэг нь тэгээс ялгаатай: $\mathrm{E}(-\theta_1\varepsilon_{t-1}^2) = -\theta_1\sigma^2$. Иймд

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1}) = -\theta_1\sigma^2 \tag{12.83}$$

$k > 1$ үед $\gamma_k = 0$ болохыг нэгэн адил үзүүлж болно. Тэгвэл

$$\rho_1 = \gamma_1/\gamma_0 = -\theta_1/(1+\theta_1^2), \quad \rho_k = 0, \quad k > 1 \tag{12.84}$$

MA(q) процессийн хувьд адилхан бодолт хийвэл, түүний автокорреляцийн функц ACF(k) нь $k > q$ үед тэгтэй тэнцүү болохыг харуулж болно. Өөрөөр хэлбэл, түүний хэлбэр AR(q) процессийн PACF(k)–тай адилхан хэлбэртэй гэсэн үг.

AR(q) процессийн PACF(k)–тай адил, MA(q) процессийн тухайн автокорреляцийн функц PACF(k) нь экспоненциалаар буурна. Иймд MA(q) процессийн (ACF, PACF) хос графикийн хэлбэр нь AR(q) процессийн (ACF, PACF) хос графиктай ижил байна. MA(1) процессийн (12.80) хэлбэрийг AR(∞) дүрслэлтэй төстэйгээр, AR(1) процессийн хувьд ((12.67)) MA(∞) хэлбэрийн дүрслэл оршин байна:

$$y_t = (1-\phi_1 L)^{-1}(\delta + \varepsilon_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1} + \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \cdots. \tag{12.85}$$

Холимог процесс. $\Phi(L) = 1-\phi_1 L$, $\Theta(L) = 1-\theta_1 L$ операторууд бүхий ARMA(1, 1) холимог процессийг авч үзье:

$$y_t - \phi_1 y_{t-1} = \delta + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1}, \quad \varepsilon_t \sim iid(0, \sigma^2). \tag{12.86}$$

$|\phi_1| < 1$, $|\theta_1| < 1$ гэж тооцно. Тэгвэл AR(1) болон MA(1) процессийн адилаар ARMA$(1, 1)$ процесс стационар бөгөөд урвуутай болохыг харуулж болно.

Өмнө үзсэн аргуудын тусламжтайгаар ARMA$(1, 1)$ процессийн дундаж, дисперс, ковариацийг бодвол:

$$\mathrm{E}(y_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}, \tag{12.87}$$

$$\gamma_0 = \mathrm{V}(y_t) = \sigma^2 \frac{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1-\phi_1^2}, \tag{12.88}$$

$$\gamma_1 = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-1}) = \phi_1\gamma_0 - \theta_1\sigma^2. \tag{12.89}$$

Нэгээс дээш эрэмбийн автокорреляцийг рекуррент харьцаагаар илэрхийлбэл

$$\gamma_k = \mathrm{Cov}(y_t, y_{t-k}) = \phi_1\gamma_{k-1}, \quad k > 1.$$

Энэхүү рекурент харьцааг хэрэглэснээр

$$\rho_k = \phi_1^{k-1}\rho_1, \quad k > 1, \quad \rho_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}. \tag{12.90}$$

(12.90)–ээс үзвэл, ARMA$(1, 1)$ процессийн ACF нь хэдийгээр ρ_1 нь өөр ч гэсэн AR(1) процессийн ACF–тэй адил болох нь харагдаж байна.

Энэ дүгнэлтийг ARMA(p, q) процессийн хувьд өргөтгөж болно. ACF–ийн эхний q утга нь AR ба MA компонентуудын харилцан үйлчлэлээр тодорхойлогдох ба автокорреляцийн функцийн цаашдын төлөв байдал нь AR(q) процесстой ижил байна. ARMA(p, q) процессийн тухайн корреляцийн функцийн хувьд дээрхтэй адил гаргалгаа хүчинтэй. Энэ функц MA(q) процессийн PACF–ийн адилаар буурна.

12.4.4 Бокс-Дженкинсийн арга зүй (ARIMA)

ARIMA загварууд. Дараалсан ялгаварт операторын тусламжтайгаар хугацааны стационар биш цувааг стационар цуваанд шилжүүлж болох тухай өмнө үзсэн. Хугацааны цуваа y_t–д дараалсан ялгаварт операторыг d удаа хэрэглэсний дараа (12.65)–аар илэрхийлэгдэх ARMA(p, q) загварыг хангах $\Delta^d y_t$ гэсэн стационар цуваа үүссэн гэе. Тэгвэл y_t–г авторегрессийн ба шилжих дунджийн интегралчлагдсан процесс (*integrated autoregression and moving average*) гээд ARIMA(p, d, q) гэж тэмдэглэнэ. (Тухайлбал $y_t = y_{t-1} + \Delta y_t$ харьцааг ашиглан Δy_t цуваанаас анхны y_t цувааны загварыг гарган авч болно.)

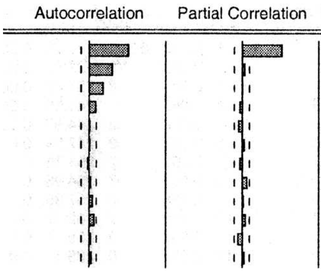
Ажиглалтын өгөгдсөн цувааны хувьд ARIMA загварыг сонгон авах Бокс-Дженкинсийн (Box, Jenkins, 1976) арга зүй нь 3 үе шатаас тогтоно.

I. *Загвараа нийцүүлэх*

I-1. Эхний алхам-стационар цуваа гарган авах. Цуваа стационар эсэхийг график шинжилгээ, ACF ба PACF функцүүдийн шинжилгээ, нэгж язгуурын тухай тест зэргээр шалгана. Хэрэв стационар бол дараагийн шатанд шилжинэ, хэрэв стационар биш бол дараалсан ялгаварт оператор авах замаар шалгах процессийг давтана. Практикт дараалсан ялгаварыг 2–оос илүүгүй удаа авна.

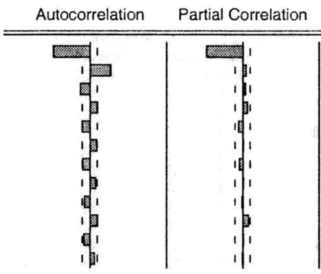
I-2. Стационар цуваа үүсмэгц ARMA(p, q) процессийн түүврийн ACF, PACF–г байгуулна. Ингэснээр шилжих дундаж q болон авторегрессийн боломжит эрэмбэ

p–ийн тухай хэд хэдэн таамаглал дэвшүүлэх боломжтой болно. Практикт $p+q<3$ байх бага эрэмбэтэй загваруудыг ашиглахыг санал болгодог (хэрэв улирлын компонентгүй бол). Түүврийн ACF ба PACF нь онолын функцүүдтэйгээ яг давхцах албагүй, харин тэдгээрт "хүрэлцээтэй ойр" байх ёстой. Зураг 12.9–12.21–д загварын жишээгээр байгуулсан түүврийн ACF ба PACF–ийг үзүүлэв.



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.539	0.539	116.40	0.000
2	0.319	0.041	157.37	0.000
3	0.190	0.004	171.91	0.000
4	0.092	-0.029	175.35	0.000
5	0.014	-0.044	175.43	0.000
6	0.012	0.033	175.50	0.000
7	-0.013	-0.026	175.56	0.000
8	0.025	0.059	175.81	0.000
9	0.042	0.018	176.52	0.000
10	0.069	0.042	178.47	0.000
11	0.027	-0.051	178.78	0.000
12	0.036	0.028	179.32	0.000

Зураг 12.9: AR(1). $Y_t = 0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$. Язгуур $\mu = 2$



	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.500	-0.500	100.19	0.000
2	0.281	0.041	131.88	0.000
3	-0.125	0.041	138.15	0.000
4	0.104	0.063	142.49	0.000
5	-0.106	-0.049	147.01	0.000
6	0.090	0.009	150.33	0.000
7	-0.096	-0.043	154.11	0.000
8	0.080	0.011	156.70	0.000
9	-0.068	-0.010	158.57	0.000
10	0.103	0.074	162.91	0.000
11	-0.081	0.009	165.60	0.000
12	0.063	-0.002	167.23	0.000

Зураг 12.10: AR(1). $Y_t = -0.5Y_{t-1} + \varepsilon_t$. Язгуур $\mu = -2$

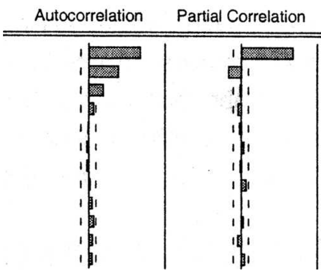
II. *Загварыг үнэлэх, загварын илэрхийлэх чадварыг шалгах*

II-1. Эхний шатанд сонгон авсан загвар бүрийг үнэлж параметрүүд болон үлдэгдлийг бодно.

II-2. Загвар бүр өгөгдөлтэй хир таарч буйг шалгана. Өгөгдөлтэй сайн таарч байгаа загваруудаас хамгийн цөөн параметрүүд бүхий загварыг сонгон авна.

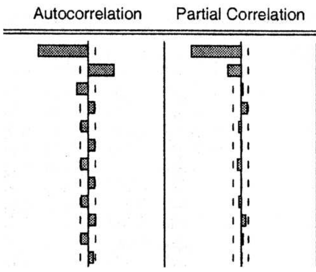
III. *Прогноз хийх*

Хоёрдугаар шатанд загвараа сонгон авсны дараа хугацааны нэг буюу хэд хэдэн



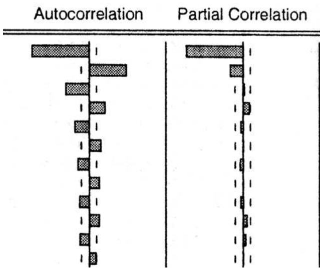
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.700	0.700	196.54	0.000
2	0.403	-0.171	261.80	0.000
3	0.203	-0.016	278.34	0.000
4	0.072	-0.037	280.46	0.000
5	-0.006	-0.023	280.47	0.000
6	-0.021	0.035	280.64	0.000
7	-0.022	-0.016	280.84	0.000
8	0.017	0.071	280.95	0.000
9	0.049	0.008	281.93	0.000
10	0.071	0.025	283.99	0.000
11	0.051	-0.043	285.05	0.000
12	0.048	0.045	286.00	0.000

Зураг 12.11: AR(2). $Y_t = 0.8Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$. Язгуур $\mu_1 = 2+i$, $\mu_2 = 2-i$



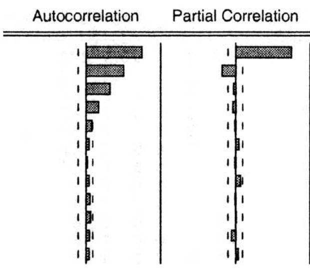
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.670	-0.670	179.75	0.000
2	0.353	-0.173	229.82	0.000
3	-0.147	0.028	238.48	0.000
4	0.087	0.083	241.55	0.000
5	-0.088	-0.032	244.67	0.000
6	0.090	0.009	247.99	0.000
7	-0.097	-0.042	251.78	0.000
8	0.088	0.007	254.96	0.000
9	-0.086	-0.030	257.98	0.000
10	0.106	0.062	262.57	0.000
11	-0.092	0.029	266.04	0.000
12	0.071	0.010	268.12	0.000

Зураг 12.12: AR(2). $Y_t = -0.8Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$. Язгуур $\mu_1 = -2 + i$, $\mu_2 = -2 - i$



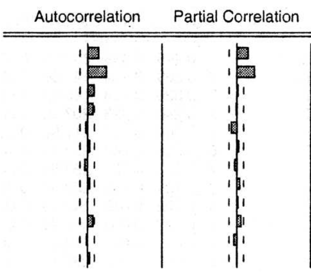
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.757	-0.757	229.80	0.000
2	0.502	-0.166	331.10	0.000
3	-0.310	0.019	369.71	0.000
4	0.220	0.089	389.25	0.000
5	-0.183	-0.030	402.74	0.000
6	0.159	0.006	412.98	0.000
7	-0.147	-0.039	421.84	0.000
8	0.132	0.005	428.98	0.000
9	-0.124	-0.028	435.28	0.000
10	0.133	0.054	442.49	0.000
11	-0.117	0.037	448.15	0.000
12	0.096	0.005	451.98	0.000

Зураг 12.13: AR(2). $Y_t = -0.9Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$. Язгуур $\mu_1 = -2.5$, $\mu_2 = -2$



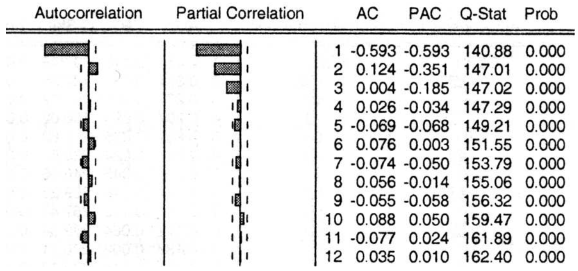
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.778	0.778	242.73	0.000
2	0.532	-0.185	356.60	0.000
3	0.336	-0.027	402.15	0.000
4	0.188	-0.037	416.43	0.000
5	0.087	-0.010	419.51	0.000
6	0.045	0.044	420.32	0.000
7	0.024	-0.010	420.55	0.000
8	0.042	0.073	421.26	0.000
9	0.060	-0.002	422.73	0.000
10	0.072	0.013	424.88	0.000
11	0.055	-0.050	426.11	0.000
12	0.045	0.035	426.94	0.000

Зураг 12.14: AR(2). $Y_t = 0.9Y_{t-1} - 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$. Язгуур $\mu_1 = 2.5$, $\mu_2 = 2$



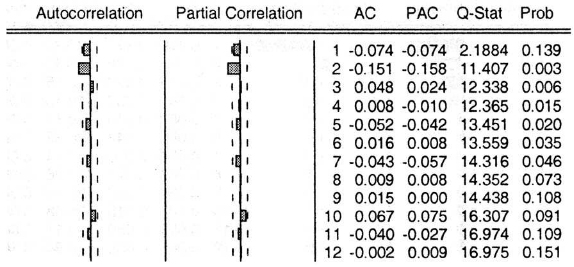
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.163	0.163	10.689	0.001
2	0.269	0.249	39.806	0.000
3	0.094	0.022	43.355	0.000
4	0.080	-0.001	45.919	0.000
5	-0.023	-0.067	46.126	0.000
6	0.034	0.025	46.595	0.000
7	-0.039	-0.028	47.211	0.000
8	0.039	0.043	47.842	0.000
9	0.007	0.018	47.863	0.000
10	0.079	0.063	50.413	0.000
11	-0.009	-0.035	50.444	0.000
12	0.041	0.003	51.134	0.000

Зураг 12.15: AR(2). $Y_t = 0.1Y_{t-1} + 0.2Y_{t-2} + \varepsilon_t$. Язгуур $\mu_1 = -2.5$, $\mu_2 = 2$



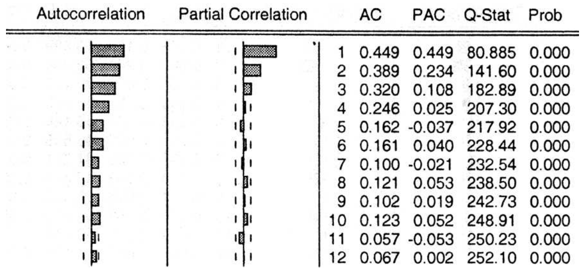
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.593	-0.593	140.88	0.000
2	0.124	-0.351	147.01	0.000
3	0.004	-0.185	147.02	0.000
4	0.026	-0.034	147.29	0.000
5	-0.069	-0.068	149.21	0.000
6	0.076	0.003	151.55	0.000
7	-0.074	-0.050	153.79	0.000
8	0.056	-0.014	155.06	0.000
9	-0.055	-0.058	156.32	0.000
10	0.088	0.050	159.47	0.000
11	-0.077	0.024	161.89	0.000
12	0.035	0.010	162.40	0.000

Зураг 12.16: MA(2). $Y_t = \varepsilon_t - 0.9\varepsilon_{t-1} + 0.2\varepsilon_{t-2}$. Язгуур $\mu_1 = 2.5$, $\mu_2 = 2$



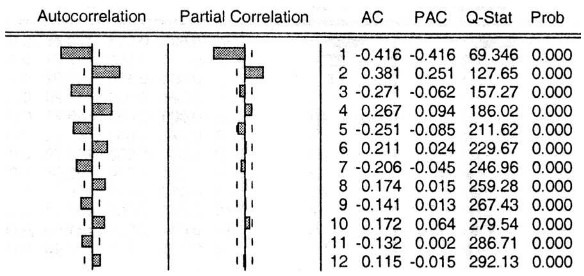
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.074	-0.074	2.1884	0.139
2	-0.151	-0.158	11.407	0.003
3	0.048	0.024	12.338	0.006
4	0.008	-0.010	12.365	0.015
5	-0.052	-0.042	13.451	0.020
6	0.016	0.008	13.559	0.035
7	-0.043	-0.057	14.316	0.046
8	0.009	0.008	14.352	0.073
9	0.015	0.000	14.438	0.108
10	0.067	0.075	16.307	0.091
11	-0.040	-0.027	16.974	0.109
12	-0.002	0.009	16.975	0.151

Зураг 12.17: MA(2). $Y_t = \varepsilon_t - 0.1\varepsilon_{t-1} - 0.2\varepsilon_{t-2}$. Язгуур $\mu_1 = -2.5$, $\mu_2 = 2$



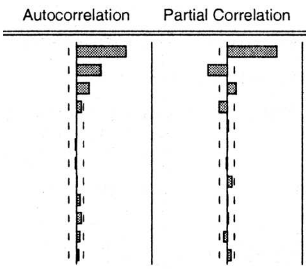
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.449	0.449	80.885	0.000
2	0.389	0.234	141.60	0.000
3	0.320	0.108	182.89	0.000
4	0.246	0.025	207.30	0.000
5	0.162	-0.037	217.92	0.000
6	0.161	0.040	228.44	0.000
7	0.100	-0.021	232.54	0.000
8	0.121	0.053	238.50	0.000
9	0.102	0.019	242.73	0.000
10	0.123	0.052	248.91	0.000
11	0.057	-0.053	250.23	0.000
12	0.067	0.002	252.10	0.000

Зураг 12.18: ARMA(1, 1). $Y_t = 0.8Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$. Язгуур $\mu_{\mathrm{AR}} = 1.125$, $\mu_{\mathrm{MA}} = 2$



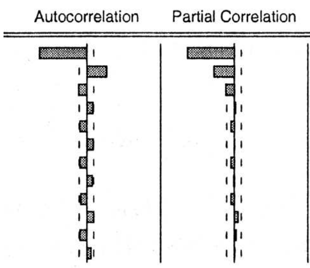
	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.416	-0.416	69.346	0.000
2	0.381	0.251	127.65	0.000
3	-0.271	-0.062	157.27	0.000
4	0.267	0.094	186.02	0.000
5	-0.251	-0.085	211.62	0.000
6	0.211	0.024	229.67	0.000
7	-0.206	-0.045	246.96	0.000
8	0.174	0.015	259.28	0.000
9	-0.141	0.013	267.43	0.000
10	0.172	0.064	279.54	0.000
11	-0.132	0.002	286.71	0.000
12	0.115	-0.015	292.13	0.000

Зураг 12.19: ARMA(1, 1). $Y_t = -0.8Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$. Язгуур $\mu_{\mathrm{AR}} = 1.125$, $\mu_{\mathrm{MA}} = -2$



Lag	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.687	0.687	189.53	0.000
2	0.336	-0.259	235.01	0.000
3	0.177	0.129	247.59	0.000
4	0.071	-0.107	249.63	0.000
5	0.003	0.018	249.63	0.000
6	-0.013	0.004	249.70	0.000
7	-0.015	-0.009	249.79	0.000
8	0.016	0.067	249.90	0.000
9	0.051	0.009	250.97	0.000
10	0.066	0.023	252.76	0.000
11	0.042	-0.044	253.50	0.000
12	0.039	0.057	254.13	0.000

Зураг 12.20: ARMA$(1,1)$. $Y_t = 0.4Y_{t-1} + \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$. Язгуур $\mu_{\mathrm{AR}} = 2$, $\mu_{\mathrm{MA}} = -2$



Lag	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	-0.662	-0.662	175.75	0.000
2	0.281	-0.279	207.58	0.000
3	-0.114	-0.117	212.83	0.000
4	0.082	0.021	215.55	0.000
5	-0.095	-0.047	219.20	0.000
6	0.095	0.008	222.85	0.000
7	-0.095	-0.047	226.53	0.000
8	0.082	-0.006	229.26	0.000
9	-0.079	-0.046	231.83	0.000
10	0.102	0.054	236.10	0.000
11	-0.091	0.029	239.50	0.000
12	0.063	0.014	241.12	0.000

Зураг 12.21: ARMA$(1,1)$. $Y_t = -0.4Y_{t-1} + \varepsilon_t - 0.5\varepsilon_{t-1}$. Язгуур $\mu_{\mathrm{AR}} = -2$, $\mu_{\mathrm{MA}} = 2$

алхмын хувьд прогноз хийж, прогнозын утгуудын итгэх завсрыг үнэлнэ.

Бокс-Дженкинсийн арга зүйн *II* ба *III* шатыг арай дэлгэрэнгүй авч үзье.

12.4.5 ARMA загварыг үнэлэх

Орчин үеийн компьютерийн программууд нь ARMA загварыг үнэлэх хамгийн бага квадратын шугаман ба шугаман биш арга эсвэл гүйцэд болон нөхцөлт хамгийн их үнэний хувь бүхий аргуудыг ашигласан байдаг.

Жишээ болгон (12.86) тэгшитгэлээр илэрхийлэгдэх ARMA$(1,1)$ загварыг авч дараах хэлбэрт бичье:

$$\Theta(L)^{-1}y_t = \Theta(L)^{-1}(\delta + \phi_1 y_{t-1}) + \varepsilon_t. \tag{12.91}$$

Үүнд: $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L,\ \Theta(L)^{-1} = 1 + \theta_1 L + \theta_1^2 L^2 + \cdots$. (12.91) тэгшитгэлд байгаа y_t–ийн өмнөх утгуудын жигнэсэн төгсгөлгүй нийлбэр $y_t^* = \Theta(L)^{-1}y_t$–г ямар нэг байдлаар тайлбарлах хэрэгтэй. Үүний боломжит нэг хувилбар нь дараах зүйлд оршино. Ажиглалтын эхний утгаас өмнөх бүх утгуудыг $y_0 = y_{-1} = \cdots = 0$ гэвэл

$$y_1^* = y_1, \quad y_2^* = y_2 + \theta_1 y_1, \quad \cdots \quad y_t^* = y_t + \theta_1 y_{t-1} + \ldots + \theta_1^{t-1} y_1.$$

Энэ тэмдэглэгээг ашиглан (12.91)–ыг бичвэл

$$y_t^* = \delta^* + \phi_1 y_{t-1}^* + \varepsilon_t, \quad \delta^* = \frac{\delta}{1 - \theta_1}. \tag{12.92}$$

Хэрэв θ_1 мэдэгдэх бол тэгшитгэл δ^*, ϕ_1–ийн хувьд шугаман боловч, ерөнхий тохиолдолд параметрүүдийнхаа хувьд шугаман биш тэгшитгэл болно.

(12.91) тэгшитгэлийг үнэлэхийн тулд y_1–ийг өгөгдсөн, $\varepsilon_t \sim iidN(0, \sigma^2)$ гэж үзээд хамгийн их үнэний хувь бүхий нөхцөлт (*conditional* ML) аргыг хэрэглэе. Үнэний хувийн нөхцөлт функц дараах байдлаар илэрхийлэгдэнэ.

$$L^* = p(y_2^*, y_3^*, ..., y_t^* | y_1^*) = \prod_{t=2}^{n} p(y_t^* | y_{t-1}^*)$$
$$= \prod_{t=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(y_t^* - \delta^* - \phi_1 y_{t-1}^*)^2\right). \quad (12.93)$$

Хамгийн их үнэний хувь бүхий нөхцөлт функцийг логарифмчилбал

$$l^* = \ln L^* = \text{const} - \frac{n-1}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(y_t^* - \delta^* - \phi_1 y_{t-1}^*)^2. \quad (12.94)$$

l^* функцийн хэлбэрээс харвал δ, ϕ_1 коэффициентуудын хамгийн их үнэний хувь бүхий нөхцөлт үнэлэлт нь хамгийн бага квадратын шугаман бус үнэлэлттэй давхцана ((12.94)–ийн баруун тал нь δ, ϕ_1–ийн хувьд шугаман биш болохыг тэмдэглэе).

Хамгийн их үнэний хувь бүхий гүйцэд арга нь (*full ML*) үнэний хувийн дараах функцийг максимумчлахад оршин:

$$L = p(y_1)L^*.$$

Алдаанууд нь нормал тархалттай байх таамаглалын үед $y_1^* \sim N(\delta^*/(1-\phi_1), \sigma^2/(1-\phi_1^2))$ билээ. Иймд үнэний хувийн логарифм функц:

$$l(\delta, \phi_1, \theta_1, \sigma^2) = \ln p(y_1) + l^* = \text{const} - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 + \frac{1}{2}\ln(1-\phi_1^2) -$$
$$-\frac{1-\phi_1^2}{2\sigma^2}\left(y_1^* - \frac{\delta^*}{1-\phi_1}\right)^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{t=2}^{n}(y_t^* - \delta^* - \phi_1 y_{t-1}^*)^2 \quad (12.95)$$

((12.95) тэгшитгэлд δ^*, болон y_t^*–г харгалзан δ, θ_1–ээр солино).

12.4.6 ARMA загварын илэрхийлэх чадварыг шалгах

ARMA загвар бидний өгөгдөлтэй хир зэрэг таарч байгааг шалгах хэд хэдэн шинжүүр байдаг.

Нэгдүгээрт: загварын коеффициентуудын үнэлэлт статистикийн үүднээс лавтайяа тэгээс ялгаатай байх ёстой. Өөрөөр хэлбэл, t-статистикийн харгалзах P-утга сонгон авсан босго утгаас бага байх ёстой.

Хоёрдугаарт: загварын алдаа ε_t цагаан шуугиан байна. Өөрөөр хэлбэл, тэдгээрийн үнэлэлт болох e_t цагаан шуугиантай адил байх ёстой. Иймд үлдэгдлүүд тэг-автокорреляцтай байх ёстой.

Тогтмол гишүүнийг агуулсан загварт үлдэгдлүүдийн дундаж тэгтэй тэнцүү. Иймээс регрессийн үлдэгдлүүдээр байгуулсан түүврийн автокорреляцийн функц дараах томъёогоор олдоно:

$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n} e_t e_{t-k}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}, \quad k = 1, 2, \ldots. \quad (12.96)$$

Хэрэв загвар илэрхийлэх чадвартай бол регрессийн алдаанууд цагаан шуугиан байх бөгөөд n, k–ийн их утгуудад r_k хэмжигдэхүүн $N(0, \frac{1}{n})$ тархалтанд ойр байна. Практикт сайн дөхөлт $k = 5 \div 6$-аас эхэлдэг. Иймээс r_k утга "корреляцийн коэффициент ρ_k тэгтэй тэнцүү" гэсэн таамаглалыг $0 \pm \frac{2}{\sqrt{k}}$ интервалын гадна 5%–ийн итгэх түвшинд няцаана.

Бусад тестүүд, үлдэгдлүүдийн автокорреляцийн функцийн эхний K утга шууд тэгтэй тэнцүү байх тухай таамаглалыг шалгадаг.

Бокс-Пирсийн Q-статистик (Box, Pierce, 1970) дараах байдлаар тодорхойлогдоно.

$$Q = n \sum_{k=1}^{K} r_k^2 \tag{12.97}$$

Автокорреляц байхгүй гэсэн тэг таамаглалын үед Q нь $\chi^2(K-p-q)$ тархалттай. Үүнд p, q нь ARMA загварын параметрүүд. Хэрэв Q–ийн гарган авсан утга критик утгаас их бол тэг таамаглалыг няцаана.

Льюнг-Боксийн статистик (Ljung, Box, 1978) нь Бокс-Пирсийн тестийн хувилбар бөгөөд

$$\widetilde{Q} = n(n+2) \sum_{k=1}^{K} \frac{r_k^2}{n-k} \tag{12.98}$$

гэж тодорхойлогдоно. Статистикийн үүднээс $\widetilde{Q}$ язгаартаа Q–ийн адил тархалттай боловч зөвхөн төгсгөлөг түүврийн хувьд χ^2 тархалтанд ойр.

Хэрэв шинжүүрээр үлдэгдлүүд автокорреляцтай болох нь илэрсэн бол ARMA загвар тохирохгүй. Иймд түүнийг сайжруулах хэрэгтэй. Тухайлбал, тодорхой дугаараас эхлэн 4–ийн давтамжтайгаар автокорреляцийн утууд тэгээс ялгаатай үед дөрөвдүгээр эрэмбийн, улиралын авторегрессийн загварыг сонгон автокорреляцийн функцийг байгуулан турших үзэх хэрэгтэй. Хэрэв тэгээс ялгаатай цорын ганц утга нь 4–тэй тэнцүү лагт харгалзаж байвал дөрөвдүгээр эрэмбийн, улирлын MA–гишүүн оруулж турших нь зүйтэй.

Бидэнд хэд хэдэн ARMA загвар илэрхийлэх чадвартай (өгөгдөлд тохирох) болох нь илэрсэн гэе. Тэгвэл "сэтгэлгээний хэмнэлт"–ийн зарчмаар хамгийн цөөн тооны параметрүүдтэй загварыг сонгон авна.

Эконометрикийн ихэнх программууд нь Акаикийн AIC (*Akaika information criterion*) (Akike, 1973) болон Шварцийн SC (*Schwarz criterion*) шинжүүрүүдийг багтаасан байдаг. Эдгээр шинжүүрүүдийн гол зорилго нь загварын параметрүүдийн тоог цөөрүүлэх, загварын чанарыг сайжруулахад оршино. Өөрөөр хэлбэл, хугацааны хамгийн бага лагийг тогтоож өгнө. Шинжүүр дараах хэлбэртэй:

$$AIC = 2\frac{p+q}{n} + \ln\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n}\right) \tag{12.99}$$

$$SC = \frac{(p+q)\ln n}{n} + \ln\left(\frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n}\right) \tag{12.100}$$

Энд p, q нь ARMA загварын лагийн тоо. Иймд AIC болон SC утгууд хамгийн бага байх тийм загварыг сонговол хамгийн цөөн параметр бүхий загвар олдоно. Акаике болон Шварцийн шинжүүрийн утга санаа засварласан R^2 коэффициенттэй ойр юм.

12.4.7 ARIMA загваруудаар прогнозлох

ARIMA загварыг ашиглахын гол зорилго бол түүврээс хальж прогнозлох буюу ирээдүйг таамаглах явдал юм. Таамаглал яг таарахгүй байх хоёр эх үүсвэр бий: нэгдүгээрт, үүсэх ε_t алдааг арилгах, хоёдугаарт, загварын коэффициентуудын үнэлэлт жинхэнэ утгаасаа хазайх хазайлт.

Энэ хэсэгт прогнозын алдааны эхний эх үүсвэрийг авч үзсэн. Өөрөөр хэлбэл, онолын загваруудын хүрээнд прогноз хийнэ.

ARMA$(1,1)$ болон ARIMA$(1,1,0)$ загварын жишээн дээр прогнозын асуудлыг авч үзье.

ARMA$(1,1)$ *загвар. Прогнозлол.* (12.86) тэгшитгэлээс y–ийн утгыг $n+1$ агшинд бичвэл:

$$y_{n+1} = \delta + \phi_1 y_n + \varepsilon_{n+1} - \theta_1 \varepsilon_n.$$

$\mu = \mathrm{E}(y_t) = \delta/(1-\phi_1)$ тэмэглэгээ ашиглавал:

$$(y_{n+1} - \mu) = \phi_1(y_n - \mu) + \varepsilon_{n+1} - \theta_1 \varepsilon_n. \tag{12.101}$$

Дундаж квадрат хазайлтыг минимумчлагч прогнозын нэг алхам дахь утга $\widehat{y}_{n+1} = \mathrm{E}(y_{n+1}|I_n)$. Үүнд I_n–хугацааны n агшин дахь мэдээлэл. (12.101)–ээс

$$(\widehat{y}_{n+1} - \mu) = \phi_1(y_n - \mu) - \theta_1 \varepsilon_n. \tag{12.102}$$

Прогонзын алдаа ба түүний дисперс:

$$e_{n+1} = y_{n+1} - \widehat{y}_{n+1} = \varepsilon_{n+1}, \quad \mathrm{V}(e_{n+1}) = \sigma^2. \tag{12.103}$$

(12.101) тэгшитгэлийн 2 итерацыг ашиглавал

$$(y_{n+2} - \mu) = \phi_1^2(y_n - \mu) + \varepsilon_{n+2} + (\phi_1 - \theta_1)\varepsilon_{n+1} - \phi_1\theta_1\varepsilon_n. \tag{12.104}$$

(12.102)–ын адилаар 2 алхмын прогнозыг бичвэл:

$$\begin{aligned}(\widehat{y}_{n+2} - \mu) &= \phi_1^2(y_n - \mu) - \phi_1\theta_1\varepsilon_n, \\ \mathrm{V}(e_{n+2}) &= \sigma^2(1 + (\phi_1 - \theta_1)^2).\end{aligned} \tag{12.105}$$

Итерацыг үргэлжлүүлснээр

$$(\widehat{y}_{n+s} - \mu) = \phi_1^s(y_n - \mu) - \phi_1^{s-1}\theta_1\varepsilon_n. \tag{12.106}$$

Эндээс үзвэл, прогнозын алхам өсөхийн хирээр прогнозын утга μ–руу тэмүүлж байна. Дараах үр дүнг харуулж болно.

$$\lim_{s\to\infty} \mathrm{V}(e_{n+s}) = \sigma^2 \left(\frac{1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2}{1 - \phi_1^2}\right). \tag{12.107}$$

Энэ илэрхийлэл (12.88)–д гарсан y_n цувааны дисперстэй давхцаж байна.

ARIMA$(1,1,0)$ *загвар. Прогнозлол.* Хугацааны стационар биш цувааны прогноз өмнөх тохиолдлоос нилээд ялгаатай. Эхний ялгавар z_t нь AR(1) процесс байх y_t гэсэн хугацааны цуваа авч үзье:

$$z_t = y_t - y_{t-1}, \quad z_t - \mu = \phi_1(z_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t. \tag{12.108}$$

(12.108)–ыг олон дахин хэрэглэвэл

$$\begin{aligned} y_{n+s} &= y_n + z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+s} \\ &= (y_n + s\mu) + (z_{n+1} - \mu) + \cdots + (z_{n+s} - \mu). \end{aligned} \tag{12.109}$$

(12.108)–ын $(z_t - \mu)$–г (12.109)–д орлуулбал

$$y_{n+s} = y_n + s\mu + \frac{\phi_1(1-\phi_1^s)}{1-\phi_1}(y_n - y_{n-1} - \mu) + e_{n+s}. \tag{12.110}$$

Үүнд,

$$e_{n+s} = \varepsilon_{n+s} + (1+\phi_1)\varepsilon_{n+s-1} + \cdots + (1+\phi_1+\phi_1^2+\cdots+\phi_1^{s-1})\varepsilon_{n+1}. \tag{12.111}$$

Дундаж квадрат хазайлтыг минимумчлагч прогноз нь (12.110)–ын эхний 3 нэмэгдэхүүнтэй тэнцүү байна. 2 ба 3–р нэмэгдэхүүн нь s–ийг өсөхөд өснө. s алхмын прогнозын алдаа e_{n+s}–тэй тэнцүү. (12.111) томъёо ёсоор алдааны дисперс

$$\mathrm{V}(e_{n+s}) = \sigma^2(1 + (1+\phi_1)^2 + \cdots + (1+\phi_1+\phi_1^2+\cdots+\phi_1^{s-1})^2). \tag{12.112}$$

Хугацааны стационар биш цувааны хувьд прогнозын алдааны дисперс нь прогнозын алхам s өсөхөд монотон өсч байна.

Энэ бүлэгт авч үзсэн бүх тооцоолол нь зөвхөн онолын загварын хувьд хийсэн болохыг дахин тэмдэглэе. Өөрөөр хэлбэл, загварын коэффициентууд яг мэдэгддэг тохиолдолд хийсэн гэсэн үг.

Гэвч практикт коэффициентуудын үнэлэлттэй холбоотой нэмэлт тодорхойгүй байдал прогнозод гарч ирдэг. Иймд прогнозын үнэлэлтийн яг таг байдал нь оптимист хандлагатай юм. Харин компьютерийн зарим пакет программуудад (жишээ нь *E-views*) прогнозын алдааны дисперсийг бодохдоо коэффициентуудын тодорхойгүй байдлыг тооцон засвар хийдэг болохыг тэмдэглэе.

12.4.8 Улирлын нөлөө бүхий ARIMA загвар

Энэ хэсэгт улирлын компонент агуулсан ARIMA загварын өргөтгөлийн тухай маш товч орууллаа. Дараах жишээг авч үзье. y_t нь улирлын компонент агуулсан цуваа байг. Тэгвэл, тухайн улирлын утгыг өмнөх жилийн мөн улирлын утгатай холбосон хялбар загварыг бичиж болно.

$$y_t = \phi_1^{(s)} y_{t-4} + u_t.$$

Хугацааны цувааны зэрэгцээ утгууд нь статистик холбоотой байх учраас u_t алдаа AR(1) процесийг хангана гэж үзэж болно.

$$u_t = \phi_1 u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon \sim iid(0, \sigma^2).$$

Сүүлчийн хоёр тэгшитгэлээс:

$$(1 - \phi_1 L)(1 - \phi_1^{(s)} L^4) y_t = \varepsilon_t,$$

эсвэл

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \phi_1^{(s)} y_{t-4} - \phi_1 \phi_1^{(s)} y_{t-5} + \varepsilon_t.$$

Ийм загварыг AR(1) $\times$ SAR(1) гэж тэмдэглэдэг. Энэ загвар, коэффициентууд нь гурван шугаман биш зааглал бүхий AR(5) загвартай төстэй.

Ийм загварын чанаруудын тухай Johnston and DiNardo–1997, Box and Jenkins–1976 бүтээлүүдээс дэлгэрэнгүй уншиж болно.

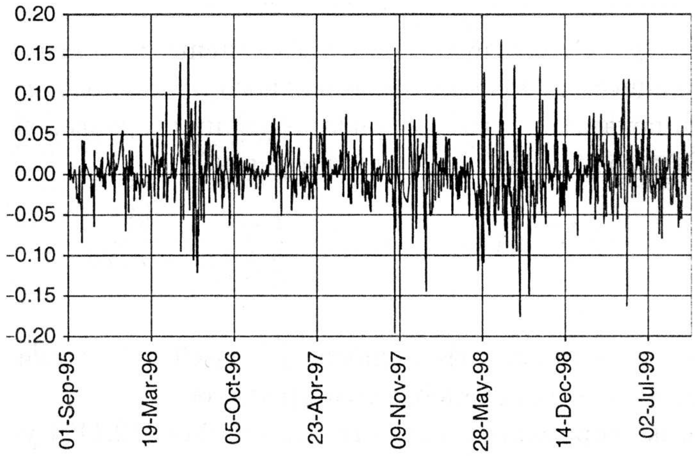
12.5 GARCH загварууд

Энэ хэсэгт, санхүүгийн зах зээлийн тухай сүүлийн үеийн сурах бичгүүдэд ихээхэн хэрэглэгдэх болсон *ARCH* болон *GARCH* загваруудын тухай товч дурдъя.

Загварын мөн чанар дараах зүйлд оршино. Бид y_t гэсэн хугацааны цувааны, өөр хугацааны цуваан дээрх регрессийг авч үзэж байгаа гэе (бүх цувааг стационар гэж үзнэ):

$$y_t = x_t^{'}\beta + u_t \tag{12.113}$$

Ийм хугацааны цувааны төлөв байдлыг туршилтын ажиглалтуудаас үзвэл, (хүүгийн хувь, мөнгөний ханш гэх мэт) дунджаасаа их болон багаар хазайсан ажиглалтууд нь кластер үүсгэх хандлагатай байдаг байна (Зураг 12.22). Өөрөөр хэлбэл, зах зээлийн "тайван" болон "савласан" төлөвүүд ээлжилдэг байна.



Зураг 12.22: Нэг өдрийн PTC индексийн өөрчлөлт.

Энгилийн (Engle, 1982) ажилд ийм үзэгдлийг загварчлах аргыг санал болгосон байдаг.

u_t алдааны нөхцөлт дисперс нь $\sigma_t^2 = \mathrm{V}(u_t|u_{t-1},\ldots,u_{t-p}) = \mathrm{E}(u_t^2|u_{t-1},\ldots,u_{t-p})$ байг (харин $\mathrm{E}(u_t|u_{t-1},\ldots,u_{t-p}) = 0$). Хазайлтуудын кластер үүсэхийг, алдааны нөхцөлт дисперс u_t ба түүнээс өмнөх дисперсүүдийн холбоог харуулсан дараах загвараар тайлбарлаж болно.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p u_{t-p}^2. \tag{12.114}$$

(12.113)–(12.114) процессийг нөхцөлт гетероскедастиктай авторегрессийн p-эрэмбийн загвар (*Autoregressive, Conditional Heteroscedastic*) гэж нэрлээд ARCH(p) гэж тэмдэглэнэ.

Ийм төрлийн хялбар загвар нь ARCH(1) юм:

$$y_t = x_t^{'}\beta + u_t.$$
$$u_t = \varepsilon_t(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2)^{1/2}, \quad \varepsilon_t \sim iidN(0,1). \tag{12.115}$$

Энэ загварт алдааны нөхцөлт дисперс хугацаанаас хамаарна:

$$\mathrm{V}(u_t|u_{t-1}) = \mathrm{E}(u_t^2|u_{t-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2.$$

Харин энэ үед алдааны нөхцөлт биш дисперс хугацаанаас хамаарахгүй:

$$\mathrm{V}(u_t) = \mathrm{V}(u_{t-1}) = \alpha_0/(1-\alpha_1).$$

Ийм учраас (12.115) загвар сонгодог шугаман регрессийн загварын бүх нөхцлийг хангана. Иймд түүний ХБК-үнэлэлтүүд хамгийн бага дисперстэй шугаман үнэлэлтүүд болно.

Санамж 12.5.1. Хамгийн их үнэний хувь бүхий аргаар гарган авч болох илүү эрчимтэй, шугаман биш үнэлэлт оршин байна. (12.115) загварын хувьд үнэний хувийн логарифм функц нь тогтмолын нарийвчлалтайгаар дараах хэлбэртэй болохыг харуулж болно:

$$\ln L = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{2}\ln(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{u_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2}. \tag{12.116}$$

Үүнд, $u_t = y_t - \beta^{'}x_t$.

(12.113)–(12.114) процессийн ARCH(p) загварт u_t алдаа стационар процесс болохыг дахин тэмдэглэе. (12.114) алдаанууд нөхцөлт гетероскедастиктай эсэхийг яаж тодорхойлох вэ? гэсэн асуултанд дараах 3 алхам бүхий процедур хариулт өгнө:

1. (12.113) тэгшитгэлд ХБК арга хэрэглэж e_t-алдааг бодно.
2. Үлдэгдлүүдийн регресс $e_t^2 = \widehat{\alpha}_0 + \widehat{\alpha}_1 e_{t-1}^2 + \cdots \widehat{\alpha}_p e_{t-p}^2$–ийг ХБК аргаар үнэлнэ.
3. $\mathbf{H}_0: \ \alpha_0 = \cdots = \alpha_p = 0$ таамаглал шалгана. Таамаглалыг шалгахдаа F-тест эсвэл Лагранжийн үржигдэхүүний LM тестийг ашиглаж болно.

Боллерслевийн (Bollerslev, 1986) ажилд алдааны нөхцөлт дисперс бүхий илүү ерөнхий загварыг дэвшүүлсэн байдаг:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p u_{t-p}^2 + \gamma_1\sigma_{t-1}^2 + \cdots + \gamma_q\sigma_{t-q}^2. \tag{12.117}$$

(12.113)-(12.117)-процессийг нөхцөлт гетероскедастик бүхий авторегрессийн p,q эрэмбийн өргөтгөсөн загвар (*Generalized Auto-Regressive, Conditional Heteroscedastic*) гэж нэрлээд GARCH(p,q) гэж тэмдэглэнэ. Энэ загварт u_t^2 цуваа нь (12.56)–д авч үзсэн ARMA(p,q) загварыг хангана.

Практикт GARCH$(1,1)$ загварыг ихэвчлэн хэрэглэнэ. GARCH загварыг өргөтгөх янз бүрийн хувилбарууд байдаг. Тухайлбал, ARCH – M, EGARCH гэх мэт GARCH төрлийн загварын тухай дэлгэрэнгүй танилцахыг хүсвэл *Green (1997)*, *Hamiltan (1994)* нарын номноос үзэхийг зөвлөж байна.

Жишээ:* GARCH *загвар:

Улсын үнэт цаасны зах зээл (ГКО) ба үнэт цаасны корпорацийн (Оросын худалдааны систем РТС) зах зээлийн холбоог сонирхъё. (Invanter, Presetsky, 1999).

$BLCP_t$, GKO_t нь "цэнхэр хасаа"–ны индекс ба улсын үнэт цаасны индексийн өдөр бүрийн утгууд байг. X_t–ээр 2 зах зээлийн нэг өдрийн орлогын ялгаварыг тэмдэглэе:

$$X_t = \ln \frac{BLCP_t}{BLCP_{t-1}} - \ln \frac{GKO_t}{GKO_{t-1}}$$

2 зах зээлийн орлогуудыг тэнцвэржүүлэх загварыг авч үзье:

$$\Delta X_t = \text{const} + \mu X_{t-1} + \varepsilon_t.$$

Үүнд, $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$.

μ параметр нь орлогуудыг тэнцвэржүүлэх хурдны утгыг илэрхийлэх ба зах зээлийн интеграцийн зэргийг заана.

1996 оны 10–р сарын 1–нээс 1997 оны 10–р сарын 10–ны хоорондох хугацааны өгөгдлүүдийг GARCH$(1,1)$ загвараар үнэлэхэд дараах үр дүн гарчээ (*EViews* программ ашигласан Зураг 12.23). Энэ загварын нөхцөлт, стандарт хазайлтыг зах зээл тогтвортой биш байгаагаар (*volatility*) тайлбарлаж болно.

График дээр дүрслэгдсэн тогтворгүй байдлын пик нь 1996 оны 5–р сарын 30 ба 1996 оны 7–р сарын 9–нд ажиглагдсан ба дээрх он цагууд нь ерөнхийлөгчийн сонгуультай холбоотой юм.

Харин ерөнхийлөгчийн сонгуулийн дараа 1996 оны зунаас 2 зах зээлийн харьцаа тогтворжиж байгаа нь ажиглагдаж байна.

12.6 Бататгах дасгал, бодлого

Бодлого 12.1. Дараах тэгшитгэлээр өгөгдсөн загварын хувьд

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

нийлбэр нөлөө нь, стационар төлөв дахь экзоген хувьсагчийн нэгж өөрчлөлтөнд харгалзах эндоген хувьсагчийн өөрчлөлт мэтээр илэрхийлэгдэхийг үзүүл (өөрөөр хэлбэл $y_t = y_{t+1} = \cdots = \overline{y},\ x_t = x_{t+1} = \cdots = \overline{x}$).

Бодолт. x_t–г тогтмол $\overline{x}$ түвшинд бэхэлсэн гэж үзье. Хэрэв тогтвортой байх $|\beta_3| < 1$ нөхцөл биелэх бол y_t нь дараах нөхцлөөр тодорхойлогдох $\overline{y}$ тогтмол руу нийлнэ.

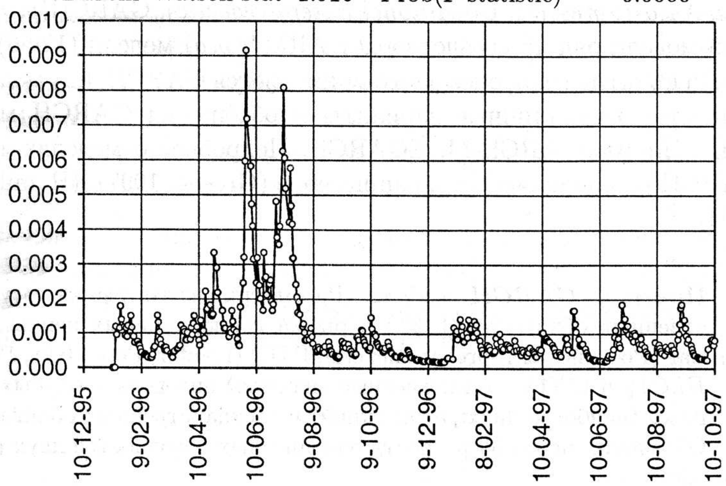
$$\overline{y} = \beta_1 + \beta_2 \overline{x} + \beta_3 \overline{y}. \tag{12.118}$$

Үнэндээ, $E(y_t)$ дараалал авбал $E\varepsilon_t = 0$ учир дараах нөхцлийг хангана.

$$Ey_t = \beta_1 + \beta_2 \overline{x} + \beta_3 Ey_{t-1}.$$

Variable	Coefficient	Std.Error	t-Statistic	Prob
C	0.000735	0.001554	0.4728	0.6368
X_{t-1}	-0.768658	0.067768	-11.34244	0.0000
Variance Equation				
C	5.14E-5	2.14E-5	2.401	0.0171
$ARCH(1)$	0.1851	0.0792	2.336	0.0203
$GARCH(1)$	0.7296	0.0875	8.337	0.0000

R-squared	0.379	Mean Dependent var	-0.000341
Adjusted R-squared	0.369	S.D. dependent var	0.0288
S.E. of regression	0.0228	Akaike info criterion	-7.538
Sum squared resid	0.128	Schwarz criterion	-7.538
Log likelihood	603.5	F-statistic	37.57
Durbin–Watson stat	1.916	Prob(F-statistic)	0.0000



Зураг 12.23: Нөхцөлт, стандарт хазайлтын график

Сүүлийн 2 тэгшитгэлээс:

$$Ey_t - \overline{y} = \beta_3(Ey_{t-1} - \overline{y}).$$

Тогтвортой байх $|\beta_3| < 1$ нөхцлөөс $Ey_t - \overline{y} \to 0$, буюу $Ey_t \to \overline{y}$ гэж мөрдөнө.

(12.118) нөхцлөөс дараах тэгшитгэл мөрдөнө.

$$\overline{y} = \frac{\beta_1}{1-\beta_3} + \frac{\beta_2}{1-\beta_3}\overline{x}.$$

Эндээс $\overline{x}$ нэг нэгжээр өсгөхөд $\overline{y}$ нь $\beta_2/(1-\beta_3)$ нэгжээр өсөх ба энэ хэмжээ нь нийлбэр нөлөөлөлтэй тэнцүү.

Бодлого 12.2. (12.3) загварын хувьд y–д үзүүлэх x-ийн нийлбэр нөлөө $B(1)/A(1)$ болохыг харуул.

$$\begin{aligned} &A(L)y_t = \delta + B(L)x_t + \varepsilon_t; \quad t = 1, ..., n, \\ &A(L) = 1 - \alpha_1 L - ... - \alpha_p L^p, \\ &B(L) = \beta_0 + \beta_1 L + ... + \beta_q L^q, \end{aligned}$$

Бодолт. Стационар төлөвийг авч үзье: $y_t \equiv \overline{y}$, $x_t \equiv \overline{x}$. Стационар төлөвт $L\overline{y} \equiv \overline{y}$ эсвэл $A(L)\overline{y} = A(1)\overline{y}$. Иймд

$$A(1)\overline{y} = \delta + B(1)\overline{x}, \quad \text{эсвэл} \;\; \overline{y} = \frac{\delta}{A(1)} + \frac{B(1)}{A(1)}\overline{x}.$$

Эндээс харахад $\overline{x}$ нэг нэгжээр өсөхөд $\overline{y}$ нь $B(1)/A(1)$ нэгжээр өсөхөд хүрэх ба энэ нь нийлбэр нөлөөтэй тэнцүү.

Бодлого 12.3. Хэрэв $A(z) = 1 - \alpha_1 z - \cdots - \alpha_p z^p$ олон гишүүнтийн бүх язгуур нэгж радиустай тойргийн гадна орших бол (12.3) тэгшитгэл

$$\begin{aligned} &A(L)y_t = \delta + B(L)x_t + \varepsilon_t; \quad t = 1, ..., n, \\ &A(L) = 1 - \alpha_1 L - ... - \alpha_p L^p, \\ &B(L) = \beta_0 + \beta_1 L + ... + \beta_q L^q, \end{aligned}$$

тогтвортой болохыг үзүүл.

Бодолт. Эхлээд $A(L)$ олон гишүүнтийг үржигдэхүүнд задалъя

$$A(L) = (1 - \lambda_1 L)(1 - \lambda_2 L) \cdots (1 - \lambda_p L).$$

Тэгвэл $1/\lambda_i$ тоо $A(z)$ олон гишүүнтийн язгуур болж байна. Иймд бодлогын нөхцөл ёсоор бүх λ_i нэгж радиустай тойргийн дотор оршино: $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, ..., p$.

Одоо, Бодлого 12.1 бодлогын адил x_t–г $\overline{x}$ түвшинд тогтмол бэхэлсэн гэж үзье. Хэрэв тэгшитгэл тогтвортой бол y_t нь дараах нөхцлөөр тодорхойлогдох $\overline{y}$ тогтмол руу нийлнэ.

$$A(L)\overline{y} = \delta + B(L)\overline{x}, \quad \text{буюу} \quad A(1)\overline{y} = \delta + B(1)\overline{x}.$$

Үнэндээ, Ey_t дараалал авахад $E\varepsilon_t = 0$ учраас дараах тэгшитгэлийг хангана

$$A(L)Ey_t = \delta + B(L)\overline{x}.$$

Сүүлийн хоёр тэгшитгэлийг хооронд нь хасвал:

$$A(L) = (Ey_t - \overline{y}) = 0.$$

$w_t = Ey_t - \overline{y}$ гэж тэмдэглэвэл w_t дараалал $A(L)w_t = 0$ ялгаварт тэгшитгэлийг хангана. Энэ тэгшитгэлийн ерөнхий шийдийг дараах хэлбэрт бичиж болно.

$$w_t = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t + \cdots + c_p\lambda_p^t,$$

Үүнд, c_i– ямар нэг тогтмолууд.

Эндээс $t \to \infty$ үед w_t тэг руу нийлэх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь бүх λ_i нэгж радиустай тойргийн дотор орших явдал юм.

Бодлого 12.4. AR(1) процессийн хувьд тухайн автокорреляцийн функц PACF(k)–г ол.

Бодолт. Тодорхойлолт ёсоор PACF(1) $= \rho_1$. PACF(2)–г олохын тулд Юл-Уолкерийн харгалзах системийг бичъе.

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2\rho_1,$$

$$\rho_2 = \phi_1\rho_1 + \phi_2.$$

Нөгөө талаас, $AR(1)$ процессийн тэгшитгэлээс

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

харгалзан y_{t-1}, y_{t-2}–ээр үржүүлж математик дундаж аван γ_0–д хуваавал

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \phi_1,\\ \rho_2 &= \phi_1\rho_1.\end{aligned}$$

Өмнөх системтэй харьцуулбал PACF(2) $= \phi_2 = 0$. Үүнчлэн бүх $k \geq 2$ хувьд PACF$(k) = \phi_k = 0$ гарна.

Бодлого 12.5. AR(2) процесс стационар байх

$$|\phi_1| < 1, \quad \phi_2 + \phi_1 < 1, \quad \phi_2 - \phi_1 < 1$$

(12.76) нөхцөл нь $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$ характеристик тэгшитгэлийн язгуур хоёулаа нэгж радиустай тойргийн гадна оршихтой эквивалент болохыг харуул.

Бодолт. $1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$ тэгшитгэлийн язгуурууд нэгж радиустай тойргийн гадна орших нөхцөл нь $z^2 - \phi_1 z - \phi_2 = 0$ тэгшитгэлийн язгуурууд нэгж радиустай тойргийн дотор орших ($|z_1| < 1,\ |z_2| < 1$) нөхцөлтэй эквивалент юм.

Эхлээд хоёр язгуур хоёулаа бодитой байх тохиолдлыг авъя:

$$\phi_2 \geq -\frac{1}{4}\phi_1^2, \quad z_{1,2} = \frac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}.$$

$|z_1| < 1, |z_2| < 1$ нөхцөл дараах тэнцэтгэл бишийн системд хүргэнэ.

$$\begin{cases} -2 < \phi_1 + \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 \\ -2 < \phi_1 - \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 \end{cases}$$

Квадрат язгуурын утга сөрөг биш болохыг тооцвол дараах эквивалент систем үүснэ:

$$\begin{cases} \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 - \phi_1 \\ \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 + \phi_1 \end{cases}$$

Системийг хоёр тохиолдолд салгая:

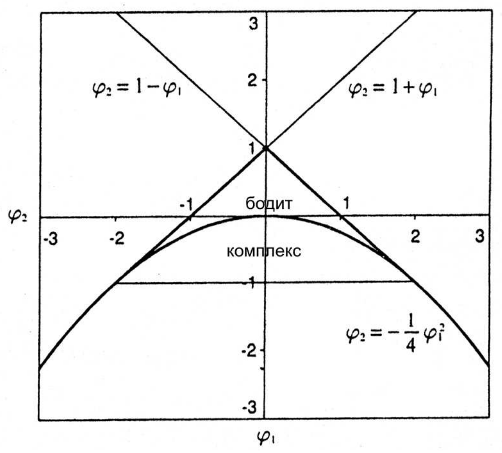
$$\begin{cases} 0 \leq \phi_1, \\ \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 - \phi_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \phi_1 < 0, \\ \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2} < 2 + \phi_1. \end{cases}$$

буюу

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_1 < 2, \\ \phi_1^2 + 4\phi_2 < (2 - \phi_1)^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 < \phi_1 < 0, \\ \phi_1^2 + 4\phi_2 < (2 + \phi_1)^2, \end{cases}$$

эндээс

$$\begin{cases} 0 \leq \phi_1 < 2, \\ \phi_2 < 1 - \phi_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 < \phi_1 < 0, \\ \phi_2 < 1 + \phi_1. \end{cases}$$



Зураг 12.24:

Абсолют хэмжигдэхүүнээрээ 1-ээс бага, хос хоёр бодит язгуурт харгалзах шийд нь дараах системээр тодорхойлогдох ба (ϕ_1, ϕ_2) хавтгай дээр муруй шугаман гурвалжин (Зураг 12.24) дүслэнэ:

$$\begin{cases} \phi_2 \geq -\dfrac{1}{4}\phi_1^2, \\ \phi_2 < 1 - \phi_1, \\ \phi_2 < 1 + \phi_1, \\ -2 < \phi_1 < 2. \end{cases}$$

Одоо 2 хосмог комплекс язгууртай тохиолдлыг авч үзье.

$\phi_2 < -\dfrac{1}{4}\phi_1^2$:

$$z_{1,\,2} = \frac{\phi_1 \pm i\sqrt{-\phi_1^2 - 4\phi_2}}{2}$$

$$|z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{1}{4}(\phi_1^2 + (-\phi_1^2 - 4\phi_2)) = -\phi_2.$$

Абсолют хэмжигдэхүүнээрээ 1–ээс бага, хоёр комплекс язгууртай байх шийдийн муж нь (ϕ_1, ϕ_2) хавтгайд дараах системээр тодорхойлогдоно.

$$\begin{cases} \phi_2 < -\dfrac{1}{4}\phi_1^2, \\ -1 < \phi_2. \end{cases}$$

Бодит болон комплекс язгуурын мужуудыг нэгтгэвэл:

$$\begin{cases} \phi_2 < 1 - \phi_1, \\ \phi_2 < 1 + \phi_1, \\ -1 < \phi_2, \end{cases}$$

системээр тодорхойлогдох ба (ϕ_1, ϕ_2) хавтгайн $(0, 1), (-2, -1), (2, -1)$ цэгүүд дээр оройтой гурвалжин болно. Үүгээр батлах зүйл батлагдав.

Бодлого 12.6. MA(q) процессийн хувьд $k > q$ үед ACF(k) $= 0$ болохыг харуул.

Бодолт. (12.77) тэгшитгэл бүхий MA(q) процессийн тодорхойлотоос

$$y_t = \delta + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-q},$$

$$y_{t-k} = \delta + \varepsilon_{t-k} - \theta_1\varepsilon_{t-k-1} - \cdots - \theta_q\varepsilon_{t-k-q}.$$

Эндээс харахад $k > q$ үед y_t болон y_{t-k}–ийн илэрхийллүүд ерөнхий ε_s алдааг агуулаагүй байна. Иймд $s \neq t$ үед ε_s болон ε_t хоорондоо корреляц хамааралгүй тул ACF$(k) = r(y_t, y_{t-k}) = 0$.

Бодлого 12.7. $MA(1)$ процессийн ($y_t = \delta + \varepsilon - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \theta_2\varepsilon_{t-2}$) урвуутай байх нөхцлийг томъёол.

Бодолт. $y_t = \delta + \Theta(L)\varepsilon_t$ гэсэн MA(2) процессийн $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2$ квадрат олон гишүүнтийг авч үзье. Урвуу процессийн хувьд, өөрөөр хэлбэл түүнийг AR(∞) хэлбэрт дүрслэхэд $\Theta(L)^{-1}$ урвуу оператор орших зайлшгүй шаардлагатай:

$$\Theta(L)^{-1}y_t = \Theta(L)^{-1}\delta + \varepsilon_t = \frac{\delta}{1-\theta_1-\theta_2} + \varepsilon_t.$$

Оператор урвуутай байх зайлшгүй бөгөөд хүрэлцээтэй нөхцөл нь $1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2$ олон гишүүнтийн язгуур нэгж радиустай тойргийн гадна орших явдал юм. Бодлого 12.5 бодлогонд $\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 = 0$ олон гишүүнтийн урвуутай байх нөхцлийг олсон билээ.

Дараах тэнцэтгэл бишийн систем бодлогын шийд болно.

$$\begin{cases} \theta_2 < 1 - \theta_1, \\ \theta_2 < 1 + \theta_1, \\ -1 < \theta_2. \end{cases}$$

Бодлого 12.8. $y_t - \mu = \phi_1(y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t$ хэлбэрийн AR(1) процессийн хувьд s алхам дахь прогнозын утга $\widehat{y}_{n+s} = \mu + \phi_1^s(y_n - \mu)$ томъёогоор олдох ба прогнозын алдааны дисперсс $V(e_{n+s}) = (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \cdots + \phi_1^{2s-2})\sigma^2$ болохыг тус тус үзүүл.

Бодолт. $y_t = \delta + \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ тэгшитгэл бүхий AR(1) процссийн хувьд (12.68) ёсоор:

$$\mu = E(y_t) = \frac{\delta}{1-\phi_1}, \quad V(y_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}.$$

$z_t = y_t - \mu$ гэж тэмдэглэвэл AR(1) процесс $z_t = \phi_1 z_{t-1} + \varepsilon_t$ хэлбэртэй болно.

Итераци хийвэл:

$$\begin{aligned} z_{n+s} =& \phi_1 z_{n+s-1} + \varepsilon_{n+s} \\ =& \phi_1^2 z_{n+s-2} + \phi_1\varepsilon_{n+s-1} + \varepsilon_{n+s} \\ =& \cdots \\ =& \phi_1^s z_n + \phi_1^{s-1}\varepsilon_{n+1} + \phi_1^{s-2}\varepsilon_{n+2} + \cdots + \phi_1\varepsilon_{n+s-1} + \varepsilon_{n+s}. \end{aligned}$$

$I_n = \{z_n, z_{n-1}, \ldots\}$ мэдээллийн нөхцөлд, n агшин дахь хамгийн сайн прогноз нь:

$$\widehat{z}_{n+s} = E(z_{n+s}|I_n) = \phi_1^s z_n.$$

$\widehat{y}_{n+s}$-прогнозыг бодвол:

$$\widehat{y}_{n+s} = \mu + \widehat{z}_{n+s} = \mu + \phi_1^s(y_n - \mu).$$

Энэ тохиолдолд прогнозын харгалзах алдаа:

$$\begin{aligned} e_{n+s} &= y_{n+s} - \widehat{y}_{n+s} = z_{n+s} - \widehat{z}_{n+s} && (12.119) \\ &= \phi_1^{s-1}\varepsilon_{n+1} + \phi_1^{s-2}\varepsilon_{n+2} + \cdots + \phi_1\varepsilon_{n+s-1} + \varepsilon_{n+s}, && (12.120) \end{aligned}$$

$s \neq t$ үед ε_s болон ε_t корреляц хамааралгүй тул дисперс нь:

$$V(e_{n+s}) = (1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \cdots + \phi_1^{2s-2})\sigma^2.$$

Хавсралт

Хүснэгт. 1. Стандарт нормал тархалтын функц $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9454	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990

Хүснэгт. 2. Стьюдентийн $t_\alpha(n)$ тархалтын квантил.
n–чөлөөнийн зэрэг, α–итгэх түвшин.

n \ α	0.25 0.50	0.10 0.20	0.05 0.10	0.025 0.05	0.01 0.02	0.005 0.010	0.001 0.002
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.214
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

Хүснэгт. 3. Фишерийн $F(k_1, k_2)$ тархалтын 95%–ийн квантил.
k_1–хүртвэрийн чөлөөний зэрэг, k_2–хуваарийн чөлөөний зэрэг.

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.71	4.68
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75

Хүснэгт. 3. Фишерийн $F(k_1, k_2)$ тархалтын 95%–ийн квантил (үргэлжлэл).

k_2 \ k_1	15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞
1	246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254
2	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.57	8.55	8.55	8.54	8.53	8.53
4	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.69	5.66	5.66	5.65	5.64	5.63
5	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.40	4.39	4.37	4.36
6	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.74	3.71	3.70	3.69	3.68	3.67
7	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.30	3.27	3.27	3.25	3.24	3.23
8	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	2.02	3.01	2.97	2.97	2.95	2.94	2.93
9	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.79	2.76	2.75	2.73	2.72	2.71
10	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.62	2.59	2.58	2.56	2.55	2.54
11	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.49	2.46	2.45	2.43	2.42	2.40
12	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.38	2.35	2.34	2.32	2.31	2.30
13	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.30	2.26	2.25	2.23	2.22	2.21
14	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.22	2.19	2.18	2.16	2.14	2.13
15	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.16	2.12	2.11	2.10	2.08	2.07
16	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.11	2.07	2.06	2.04	2.02	2.01
17	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.06	2.02	2.01	1.99	1.97	1.96
18	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.02	1.98	1.97	1.95	1.93	1.92
19	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.98	1.94	1.93	1.91	1.89	1.88
20	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.95	1.91	1.90	1.88	1.86	1.84
22	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.89	1.85	1.84	1.82	1.80	1.78
24	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.84	1.80	1.79	1.77	1.75	1.73
26	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.80	1.76	1.75	1.73	1.71	1.69
28	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.77	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65
30	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.74	1.70	1.68	1.66	1.64	1.62
40	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.64	1.59	1.58	1.55	1.53	1.51
60	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.53	1.48	1.47	1.44	1.41	1.39
120	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.46	1.43	1.37	1.35	1.32	1.28	1.25
200	1.72	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.39	1.32	1.29	1.26	1.22	1.19
∞	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.35	1.32	1.24	1.22	1.17	1.11	1.00

Хүснэгт. 4. $\chi^2(n)$ тархалтын утга. n–чөлөөний зэрэг, α–итгэх түвшин.

n \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.100	.050	.025	.010	.005
1	.000039	.000157	.000982	.003932	.0157908	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944
2	.010025	.020101	.050636	.102587	.210720	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966
3	.071721	.114832	.215795	.351846	.584375	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381
4	.206990	.297110	.484419	.710721	1.06362	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602
5	.411740	.554300	.831211	1.14548	1.61031	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496
6	.675727	.872085	1.23735	1.63539	2.20413	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476
7	.989265	1.23904	1.68987	2.16735	2.83311	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777
8	1.34442	1.64648	2.17973	2.73264	3.48954	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550
9	1.73493	2.08791	2.70039	3.32511	4.16816	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893
10	2.15585	2.55821	3.24697	3.94030	4.86518	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882
11	2.60321	3.05347	3.81575	4.57481	5.57779	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569
12	3.07382	3.57056	4.40379	5.22603	6.30380	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995
13	3.56503	4.10691	5.00874	5.89186	7.04150	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194
14	4.07468	4.66043	5.62872	6.57063	7.78953	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193
15	4.60094	5.22935	6.26214	7.26094	8.54675	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013
16	5.14224	5.81221	6.90766	7.96164	9.31223	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672
17	5.69724	6.40776	7.56418	8.67176	10.0852	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185
18	6.26481	7.01491	8.23075	9.39046	10.8649	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564
19	6.84398	7.63273	8.90655	10.1170	11.6509	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822
20	7.43386	8.26040	9.59083	10.8508	12.4426	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9968
21	8.03366	8.89720	10.2829	11.5913	13.2396	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010
22	8.64272	9.54249	10.9823	12.3380	14.0415	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956
23	9.26042	10.1956	11.6885	13.0905	14.8479	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813
24	9.88623	10.8564	12.4011	13.8484	15.6587	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585
25	10.5197	11.5240	13.1197	14.6114	16.4734	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278
26	11.1603	12.1981	13.8439	15.3791	17.2919	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899
27	11.8076	12.8786	14.5733	16.1513	18.1138	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449
28	12.4613	13.5648	15.3079	16.9279	18.9392	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933
29	13.1211	14.2565	16.0471	17.7083	19.7677	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356
30	13.7867	14.9535	16.7908	18.4926	20.5992	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720
40	20.7065	22.1643	24.4331	26.5093	29.0505	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659
50	27.9907	29.7067	32.3574	34.7642	37.6886	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900
60	35.5346	37.4848	40.4817	43.1879	46.4589	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517
70	43.2752	45.4418	48.7576	51.7393	55.3290	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215
80	51.1720	53.5400	57.1532	60.3915	64.2778	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.1963	61.7541	65.6466	69.1260	73.2912	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100*	67.3276	70.0648	74.2219	77.9295	82.3581	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

Хүснэгт. 5. Дарвин Ватсоны d статистикийн дээд, доод утга ($\alpha = 0.05$).

	$k' = 1$		$k' = 2$		$k' = 3$		$k' = 4$		$k' = 5$		$k' = 10$		$k' = 15$	
n	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dU	dL	dU	dL
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220	0.111	3.438		
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.155	3.304		
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104	0.198	3.184		
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060	0.244	3.073		
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.290	2.974		
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.336	2.885	0.063	3.676
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.380	2.806	0.091	3.583
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940	0.424	2.734	0.120	3.495
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920	0.465	2.670	0.153	3.409
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.506	2.613	0.186	3.327
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.544	2.560	0.221	3.251
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.581	2.513	0.256	3.179
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.616	2.470	0.291	3.112
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850	0.650	2.431	0.325	3.050
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841	0.682	2.396	0.359	2.992
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833	0.712	2.363	0.392	2.937
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825	0.741	2.333	0.425	2.887
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819	0.769	2.306	0.457	2.840
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813	0.795	2.281	0.488	2.796
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	0.821	2.257	0.518	2.754
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803	0.845	2.236	0.547	2.716
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	0.868	2.216	0.575	2.680
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795	0.891	2.198	0.602	2.646
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	0.912	2.180	0.628	2.614
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	0.932	2.164	0.653	2.585
40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786	0.952	2.149	0.678	2.557
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776	1.038	2.088	0.788	2.439
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.110	2.044	0.882	2.350
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.170	2.010	0.961	2.281
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.222	1.984	1.029	2.227
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.266	1.964	1.088	2.183
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.305	1.948	1.139	2.148
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770	1.339	1.935	1.184	2.118
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.369	1.925	1.224	2.093
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774	1.396	1.916	1.260	2.073
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.420	1.909	1.292	2.055
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.442	1.903	1.321	2.040
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780	1.462	1.898	1.347	2.026
150	1.720	1.746	1.706	1.760	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.594	1.877	1.519	1.956
200	1.758	1.778	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.810	1.718	1.820	1.665	1.874	1.610	1.931

Ном зүй

[1] Green W. H. *Econometric Analysis*, 3rd edition. Prentice-Hall, 1997.

[2] Johnston J. and DiNardo J.*Econometric Methods*, 4th edition. McGraw-Hill, 1997.

[3] Damodar N. Gujarati. *Basic Econometrics*, 3rd edition. McGraw-Hill, 1995.

[4] Jeffrey M. Wooldridge. *Introductory Econometrics*, 2rd edition. McGraw-Hill, 2005.

[5] Магнус Я. Р, Катышев П. К, Пересецкий А. А. *Эконометрика* , М: Начальный курс, 2001.

[6] Магнус Я. Р, Катышев П. К, Пересецкий А. А. *Сборник задач к начальному курс Эконометрика* , 2003.

[7] Ежова Л. Н. *Основы Эконометрики* , М: Учебное пособие, 2000.

[8] Кремер Н. Ш, Путко Б. А. *Эконометрика* , 2005.